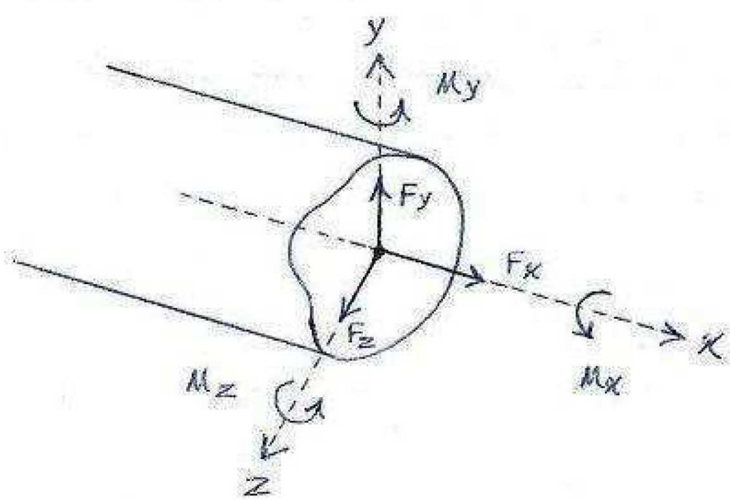
« بسم الله الرحمن الرحیم »

درس - مقاومت مصالح (۱)

شماتیک عمومی :



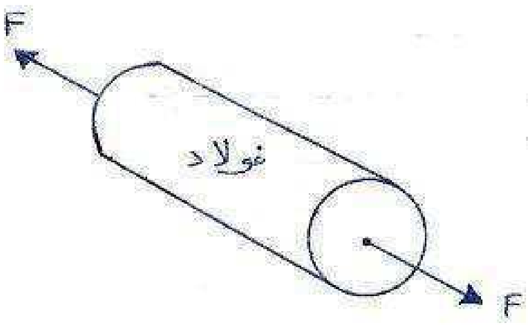
F_x : axial Force نیروی محوری

F_y و F_z : shearing Force نیروهای برشی

* F_xها ایجاد کشش یا فشار می کنند.

M_x : Twisting Couple گشتاور پیچشی

M_y , M_z : Bending Moment گشتاور خمشی



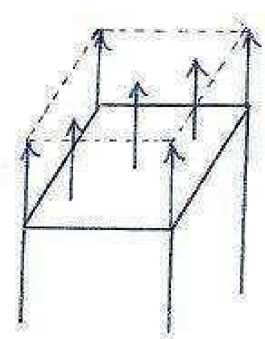
* تعریف مقاومت تنها بر حسب نیروی محوری صحیح نیست بلکه به سطح مقطع هم بستگی دارد.

* تنش : توزیع نیرو بر واحد سطح ، $\sigma = \frac{F}{A}$, $(\frac{N}{m^2})$

* چون در بخش نیروی محوری هستیم این تنش را «تنش محوری» گویند.

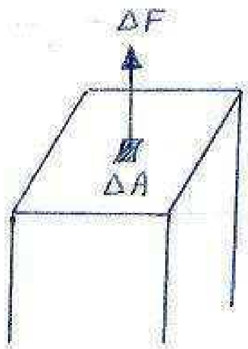
$$SI \begin{cases} Pa = \frac{N}{m^2} \\ MPa = 10^6 \ Pa \\ GPa = 10^9 \ Pa \end{cases}$$

$$\begin{cases} psi = lb/in^2 \\ psf = lb/ft^2 \end{cases}$$



$\sigma = \frac{F}{A}$

تنش محوری را تنش نرمال هم می گویند چون بر هر مقطعی موازی با سطح عمود است.



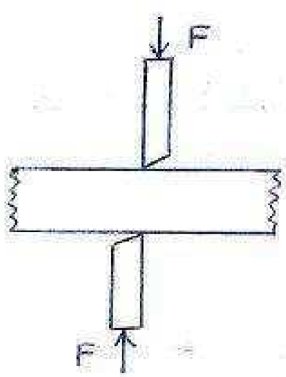
اگر توزیع تنش یکنواخت نباشد :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$dF = \sigma \cdot dA$$

$$F = \int dF = \int \sigma \, dA$$

تنش برشی -

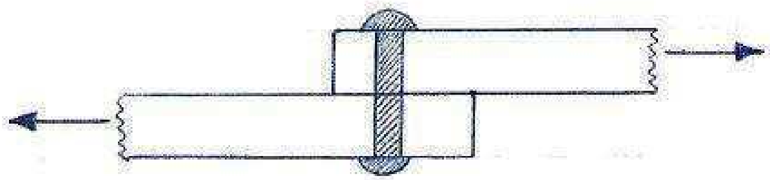


* $\tau_{ave} = \dfrac{F}{A}$

* $\tau = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta A}$

* معمولاً پیچها، پرچها و پینها تحت اثر نیروی برشی قرار می‌گیرند.

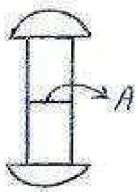
پرچها -



دو مطلب اهمیت دارد

۱- مقاومت خود پین

۲- مقاومت ورق پشت پین

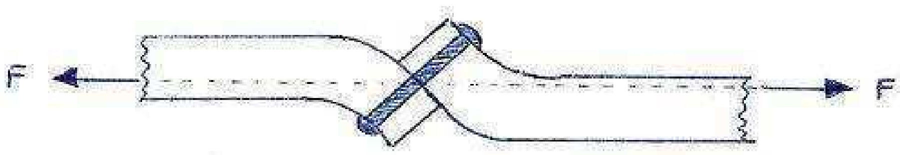


$$\tau_{ave} = \frac{F}{A}$$

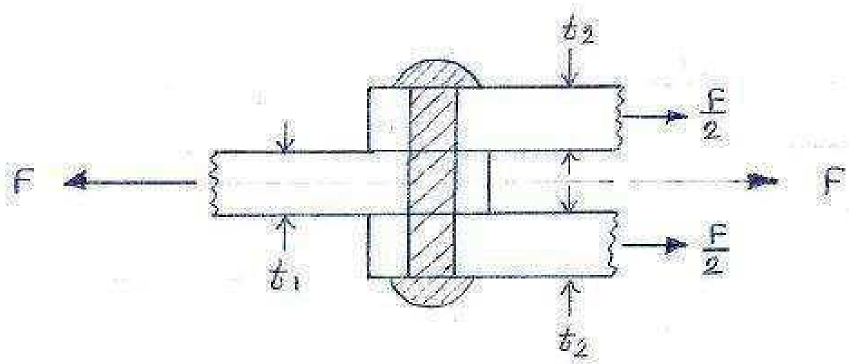
single shear (I)

برش ساده

به علت فاصله بین امتداد نیروهای طرفین یک گشتاور پدید می‌آید که باعث deformation می‌شود.



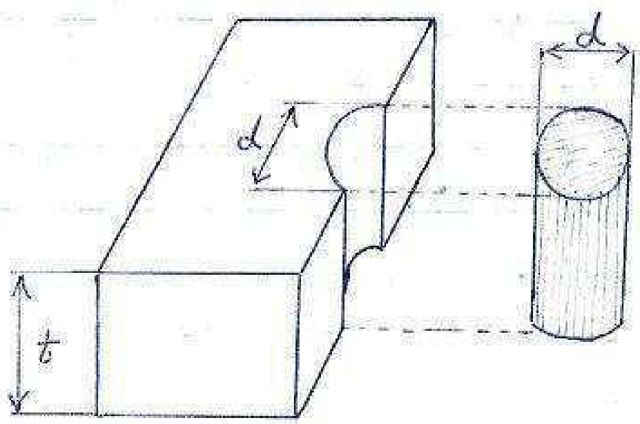
برای حل این مشکل:



$$\tau_{ave} = \frac{F}{2A} \qquad \text{double shear} \qquad (II)$$

برش دوبل

* اما در مورد ورق یا صفحهٔ پشت پین : (تنش لهیدگی)
(تنش تکیه‌گاهی)
(Bearing stress)



I) $\sigma_b = \frac{F}{t \cdot d}$

II) $\sigma_b = \frac{F}{2 t_2 d}$

تنش حدّ نهائی - بالاترین تنشی که یک جسم می‌تواند تحمل کند.
برای فولاد ساختمانی $3700\ kg/cm^2$ است.

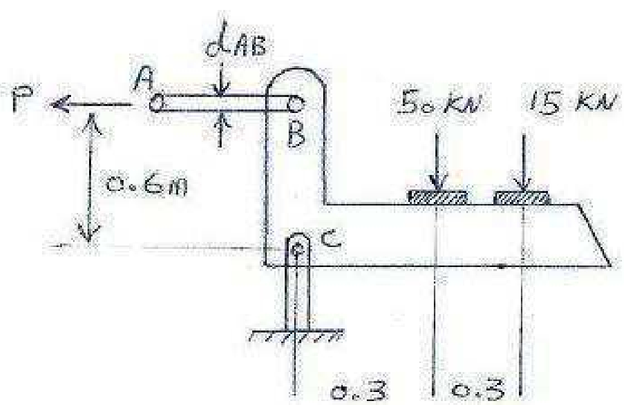
$$\text{تنش مجاز} = \frac{\text{تنش حد نهائی}}{\text{ضریب اطمینان}}$$

تنش حد نهائی : ultimate stress
تنش مجاز : allowable stress
ضریب اطمینان : Factor of safety (F.S.)

« $\sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S}$ $\qquad$ $\tau_{all} = \frac{\tau_u}{F.S}$ »

هر قدر ضریب اطمینان بالاتر باشد پایه های ساختمان محکمتر و قطعات سنگین تر و قیمت تمام شده بالاتر است. در صنایع هوائی ضریب اطمینان را بالا نمی برند تا هواپیما سنگین نشود بلکه در کیفیت مصالح دقت می کنند.

مثال -



AB $\quad \sigma_u = 600$ MPa

$F.S. = 3.3$

$d_{AB} = ?$

C پین :

$\tau_u = 350 \ MPa$

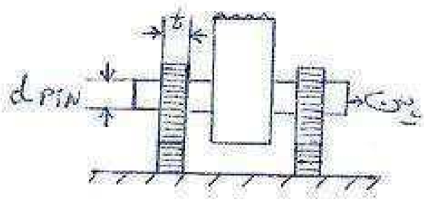
$d_{PIN} = ?$

$F.S. = 3.3$

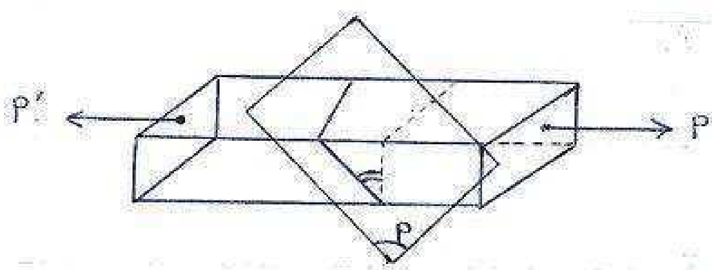
C تکیه‌گاه :

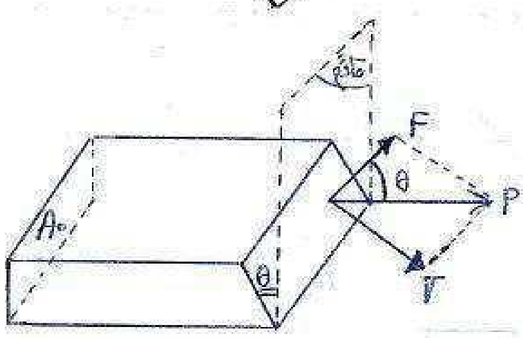
$\sigma_{all} = 300 \ MPa$

$t = ?$



تنش در صفحهٔ مایل :





F - عمود بر صفحه قائم

V - مماس بر صفحه قائم

$$F = P\cos\theta \qquad A_0 = A_\theta \cos\theta$$

$$V = P\sin\theta \qquad A_\theta = \frac{A_0}{\cos\theta}$$

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} \rightarrow \sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{A_0/\cos\theta} \rightarrow \tau = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta$$

بحث –

۱) $\theta = 0$ $\qquad \sigma_{max} = \dfrac{P}{A_0}$

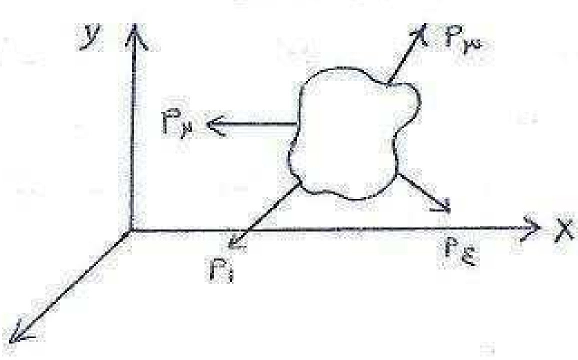
۲) $\theta = 90^\circ$ $\qquad \sigma = 0$

۳) $\theta = 45^\circ$ $\qquad \begin{cases} \tau_{max} = \dfrac{P}{2A_0} \\ \sigma = \dfrac{P}{2A_0} \end{cases}$

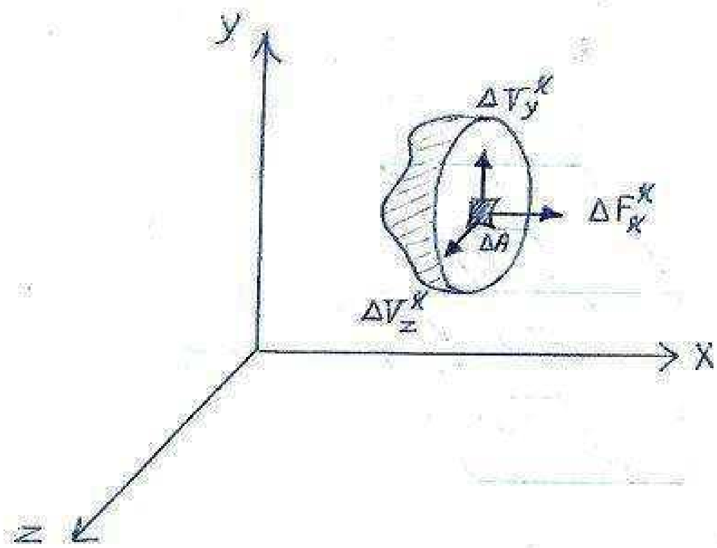
---

* اگر جسمی در تمام جهات تحت نیرو قرار بگیرد یا :

« تنش در شرایط کلی بارگذاری »



الف - جسم را با صفحه‌ای موازی $y-z$ قطع می‌کنیم :

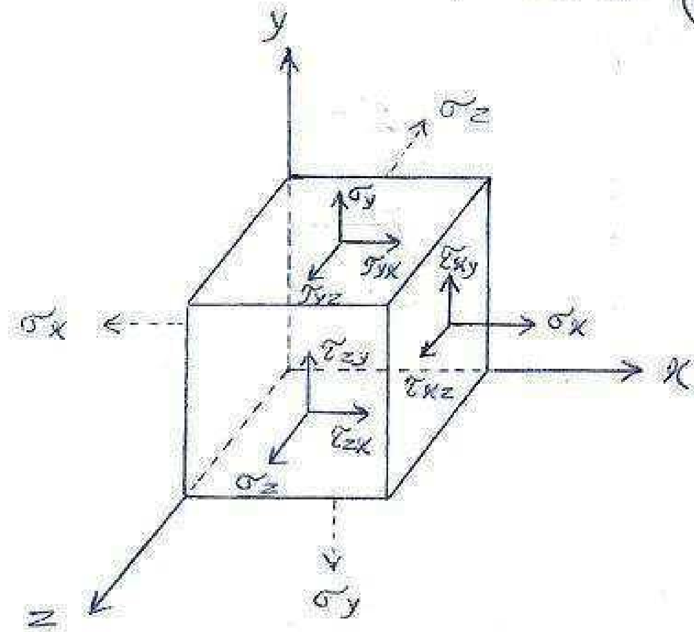


F_x^x : x بالائی صفحه قطع کننده را مشخص می‌کند (که صفحه $y-z$ است عمود بر محور x) . اندیس پائینی جهت نیرو را نشان می‌دهد .

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta F_x^x}{\Delta A} \\ \tau_{xy} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \\ \tau_{xz} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta V_z^x}{\Delta A} \end{cases}$$

برای حالت الف -	τ_{xz}	τ_{xy}	σ_{xx}
برای حالت ب -	τ_{yz}	σ_{yy}	τ_{yx}
برای حالت ج -	σ_{zz}	τ_{zy}	τ_{zx}

* اگر پس از قطع، قطعه سمت راست را در نظر بگیریم بازهم (۹)
حالت تنش خواهیم داشت.



* در هر وجه مکعب سه مؤلفه داریم لذا در کلی ترین حالت برای یک المان مکعبی شکل ۱۸ تنش داریم که اگر در حالات خاص دو به دو آنها را مساوی فرض کنیم حداقل (۹) تنش خواهیم داشت.

* تنش از جنس بردار نیست و مانند نیرو نمی باشد و لذا نقطه اثر برای آن معنی ندارد و روی سطح تعریف می شود.
تنش به زاویه صفحه هم بستگی دارد.

* تنش تانسور مرتبه دوم است. کمیتهای اسکالر تانسور مرتبه صفرم هستند و کمیتهای برداری تانسور مرتبه اول هستند.

نکته - اگر در حالت فوق نیروها را ($F = \sigma \cdot A$) قرار دهیم و برای حالت تعادل استاتیکی حول یکی از محورها - گشتاور بگیریم به نتیجه جالبی می رسیم:

* یعنی -

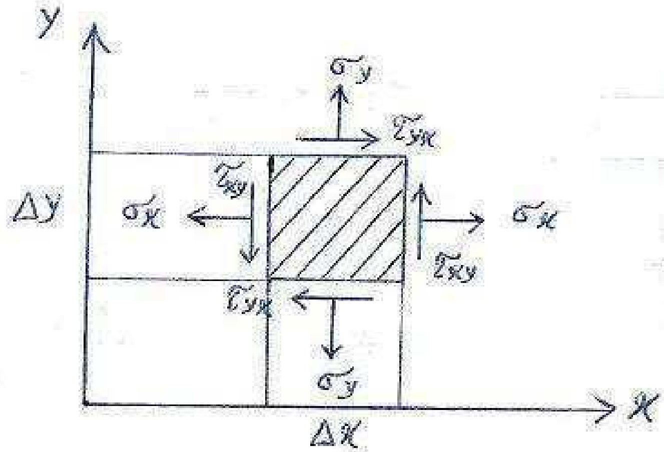
$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned}}$$

تنشهائی که روی دو وجه عمود برهم به یکدیگر نزدیک می‌شوند با هم برابرند . پس برای حالت کلی کافیست تنها (۶) مؤلفه (سه تا محوری و سه تا برشی) را تعریف کنیم .

* پس اگر روی یکی از دو صفحه عمود برهم تنش برشی بوجود آید روی دیگری هم پدید می‌آید .

* روی المانهای چرخیده و زاویه دار ولو اینکه تنها نیروهای محوری داشته باشیم بازهم تنش برشی پدید می‌آید .

« تنش دو بعدی » : مثلاً برای صفحه‌ها .



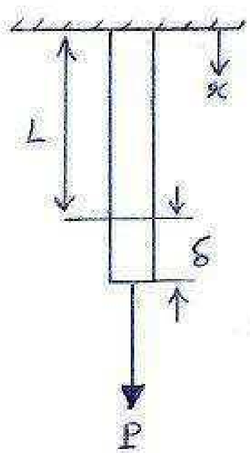
* مانند حالت قبل : « $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ »

تغییر فرم : « Deformation »

* بحث ما فعلاً در نیروهای محوری (فشاری ، کششی) است.

* عوامل مؤثر در کاهش یا ازدیاد طول :

۱- سطح مقطع
۲- جنس
۳- طول



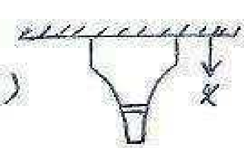
تغییر طول = δ = Elongation

تغییر طول نسبی = ε = Strain

« $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ کرنش »

« $\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$ »

(برای مقاطع ناهمگن)

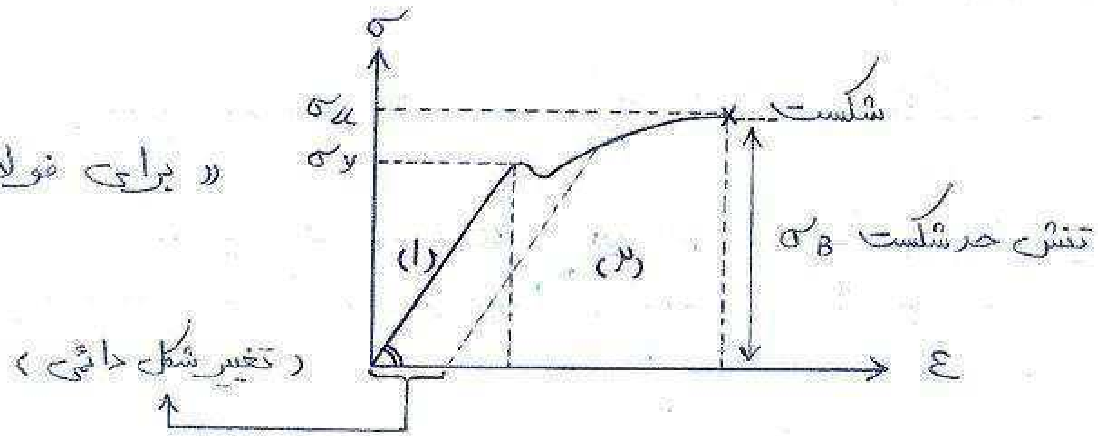


* کرنش دیمانسیون ندارد .

رابطه (دیاگرام) تنش و کرنش :

* دیاگرام ($\varepsilon - \sigma$) بستگی مستقیم به جنس دارد و به صورت تجربی بدست می آید .

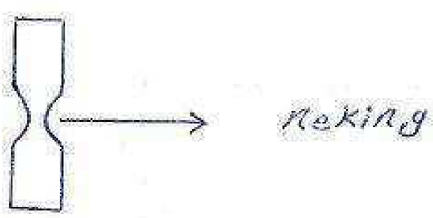
« برای فولاد »



σ_u – ultimate stress — تنش حد نهائی

σ_y – yield stress — تنش حد تسلیم

σ_B – Braking stress — تنش حد شکست



ناحیه (۱) : ناحیه الاستیک

ناحیه (۲) : ناحیه پلاستیک

* در مقاومت مصالح بحث عمده ما در رابطه با طراحی اجسام در ناحیه الاستیک است.

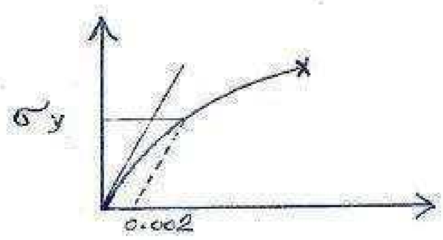
* مسئله ای که به ویژه در مورد فولادها بسیار مهم است این است که رفتار فولادها در ناحیه الاستیک خطی است :

$\sigma = E \cdot \varepsilon$ «قانون هوک»

* E : ضریب زاویه

* هر قدر جسم سخت تر باشد E بزرگتر است و بالعکس.

در مورد اجسامی که ductile نیستند و در ناحیه الاستیک به صورت منحنی تغییر می کنند تقریب 0.2% در نظر می گیرند :



0.2% offset method

درصد ازدیاد طول - (percent Elongation)

هر قدر E بزرگتر باشد درصد ازدیاد طول کمتر است لذا فولادهای ساختمانی را از جنس نرم انتخاب می کنند.

$$\text{درصد ازدیاد طول} = \frac{L_B - L_o}{L_o} \times 100$$

Braking - B

درصد کاهش سطح مقطع -

$$\text{درصد کاهش سطح مقطع} = \frac{A_0 - A_B}{A_0} \times 100$$

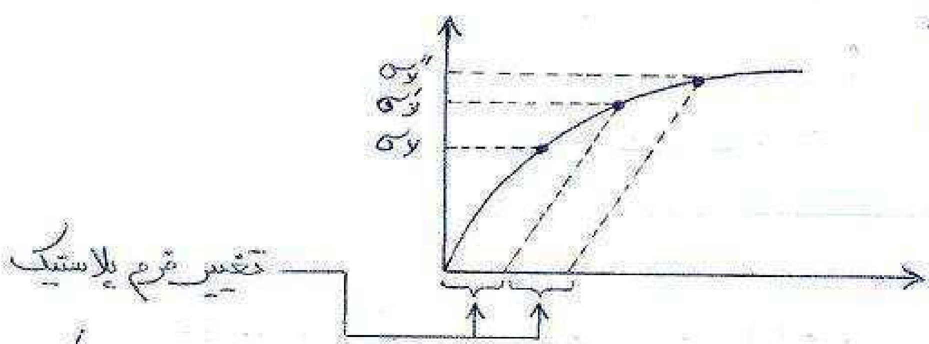
---

* $\sigma = \frac{P}{A_0}$ تنش تقریبی و مهندسی است چون مرتباً سطح مقطع کاهش می یابد و تنش واقعی از تقسیم لحظه‌ای P به A همان لحظه بدست می آید $\sigma = \frac{P}{A}$.
به همین ترتیب $\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$ کرنش مهندسی است و $\Delta\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$:

$$\varepsilon_t = \Sigma \Delta\varepsilon = \Sigma \Delta L / L = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

$\varepsilon_t = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$ «کرنش واقعی»

روش کرنش سختی :
(strain hardening)

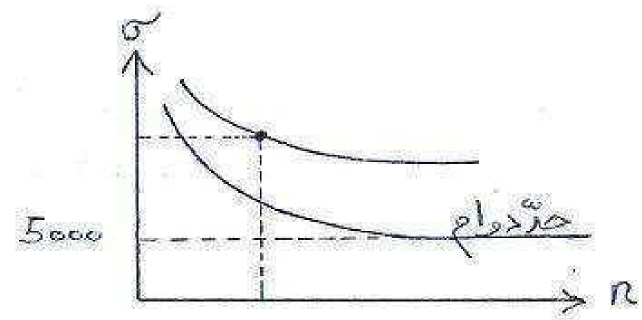


* اگر در صنعت چند بار جسم را تحت کرنش تمام دهیم و به حد پلاستیک برسانیم و سپس ول کنیم تنش حد تسلیم جسم بالا می رود (به شرط آن که به اندازه باشد) . چکش کاری سطح بعضی قطعات (مثل - محور قطار) نیز به همین دلیل می باشد.

خزش (Creep) : اگر قطعه‌ای در ناحیه الاستیک طراحی و بارگذاری شود امّا بار به مدّت طولانی روی جسم قرار گیرد، جسم دفرمه می‌شود و به شکل اولیه باز نمی‌گردد. خزش به دما هم بستگی دارد.

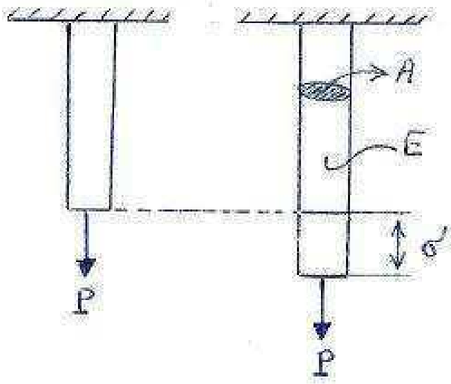
خستگی (fatigue) : در اثر بارگذاری متناوب این پدیده در جسم رخ می‌دهد که موجب شکست جسم می‌شود.

* برای مواد مهندسی یک نمودار ارائه می‌شود که معمولاً این نمودارها از یک حدّی به بعد مستقیم می‌شوند که به آن حدّ دوام گویند که از آن پس می‌توان بطور دائمی به آن اطمینان داشت.



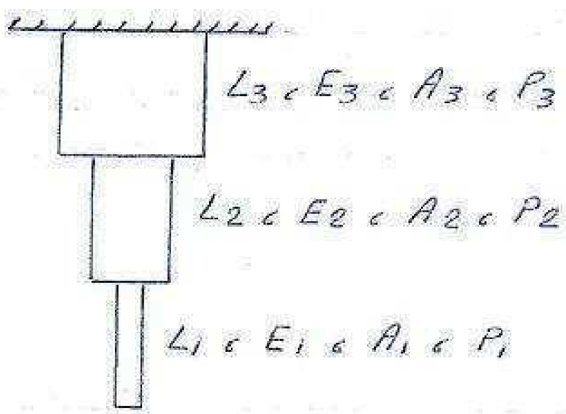
n - تعداد دفعات بارگذاری در طول عمر طراحی شده جسم.

تغییر فرم تحت بارگذاری محوری :



$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{P}{A} \\ \sigma = E\varepsilon \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{P}{AE} \\ \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta = \dfrac{PL}{AE}}$$

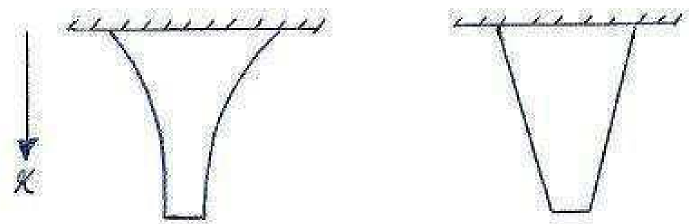
حالت کلی -



$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

* این برای مقاطعی است که می توان آنها را تقسیم بندی کرد.

* برای مقاطعی که قابل تقسیم بندی نیست :

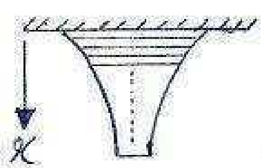


$$\varepsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

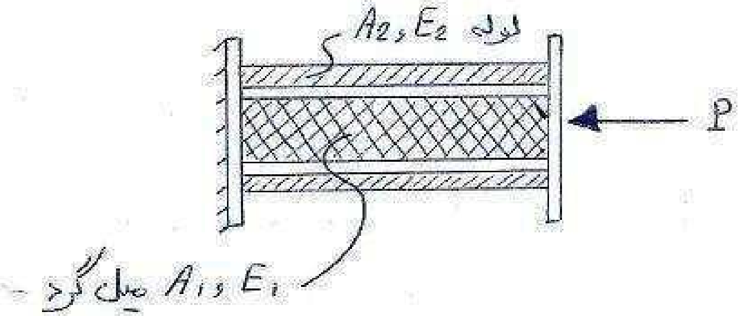
$$d\delta = \varepsilon\, dx$$

$$d\delta = \frac{P\,dx}{AE} \Rightarrow \boxed{\delta = \int_0^L \frac{P\,dx}{AE}}$$

* امّا P هم می تواند تغییر کند مثلاً در یک میله آویخته نیروی وزن در لایه های بالائی بیشتر است و در لایه های پائین کمتر یعنی P هم تابع x می شود.



مسائل نامعین



* معین کنید که میله گرد و لوله هر یک چه مقدار از نیرو را منتقل می کنند ؟

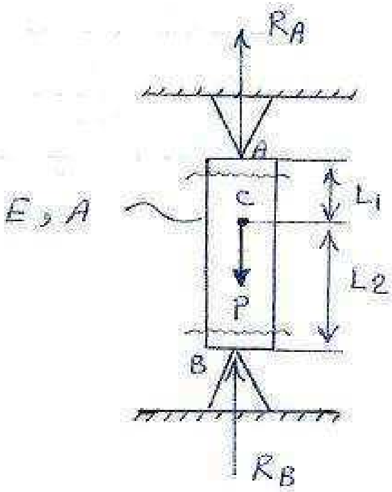
این مسئله از نظر استاتیکی نامعین است چون فقط معادله :
$P = P_1 + P_2$ را دارد اما به کمک مقاومت مصالح :

$$P = P_1 + P_2 \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \\ \delta_2 &= \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\delta_1 = \delta_2} \frac{P_1 L}{A_1 E_1} = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \quad (II)$$

$$(I) , (II) \Rightarrow \quad * \; P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

$$* \; P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$



مثال 2 - عکس العمل هر تکیه گاه چقدر است ؟

استاتیک → $R_A + R_B = P \quad (I)$

* در مقاومت مصالح می گوییم مجموع تغییر طولها باید صفر شود :

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

* در مقطع پایین نیروی داخلی R_B و فشاری و منفی است

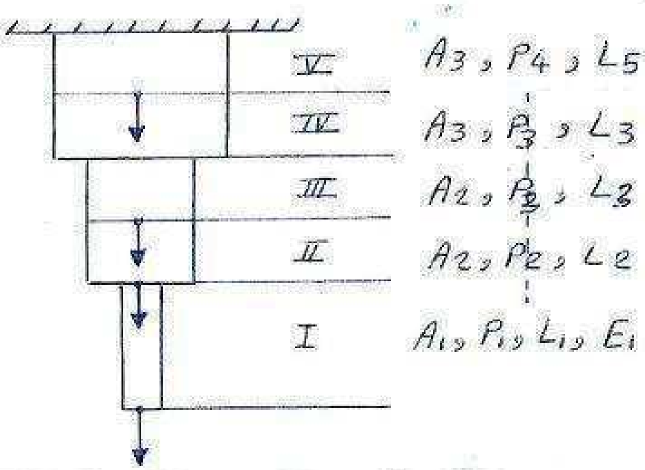
و در مقطع بالائی نیروی داخلی R_A و کششی و مثبت است :

$$\frac{R_A L_1}{AE} - \frac{R_B L_2}{AE} = 0 \qquad (II)$$

$$(I) \text{ و } (II) \Rightarrow \quad * \; R_A = \frac{PL_2}{L}$$

$$* \; R_B = \frac{PL_1}{L}$$

راه حل دوم - از اصل جمع بندی آثار جداگانه یا - (Superposition) استفاده می شود .



هرجا سطح مقطع یا نیرو عوض شود - یک مقطع جدید پدید می آید .

تغییر طول حرارتی :

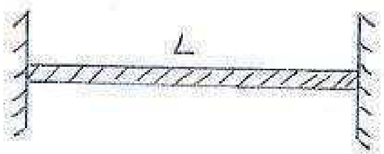
Termal - T

چون تغییر طول داریم پس سراغ کرنش می‌رویم :

$$\delta_T = \alpha (\Delta T) L$$

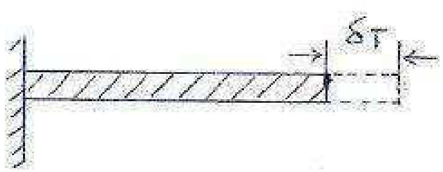
$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_T = \alpha \Delta T}$$

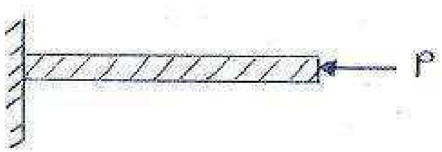
* کرنش حرارتی (Termal Strain) تنها کرنشی است که بدون تنش پدید می‌آید .



** اگر قطعه بین دو تکیه گاه قرار گیرد و حرارت ببیند یا سرد شود در آن تنش پدید می‌آید اما کرنش ظاهر نمی‌شود چون امکان ازدیاد طول وجود ندارد و این تنها حالتی است که تنش بدون کرنش داریم .

* برای حل این مسئله نامعین از super position استفاده می‌کنیم و یک تکیه گاه را حذف می‌کنیم :





* P نیروی وارد از تکیه گاه حذف شده است .

اثر تکیه گاه فرضی این است که مانع بروز δ_T می‌شود :

$$\left.\begin{aligned} \delta_T &= \alpha(\Delta T)L \\ \delta_P &= \frac{PL}{AE} \quad (\text{اثر تکیه‌گاه فرضی}) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\delta_T+\delta_P=0]{\text{با یر}}$$

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

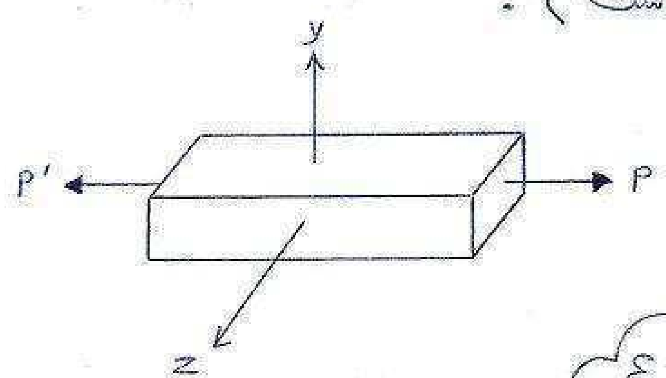
$$* \; P = -AE\alpha(\Delta T)$$

$$\left(\sigma = \frac{P}{A}\right) \rightarrow \quad * \; \sigma_T = -E\alpha(\Delta T)$$

کرنش سه بعدی :

$* \quad \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$ کرنش محوری (قانون هوک)

* قانون هوک درحالتی صدق می‌کند که بارگذاری الاستیک باشد و جسم همگن و ایزوتروپ است (یعنی مدول الاستیسیته در سه جهت x و y و z یکسان است).



کرنش جانبی $\boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z}$

« lateral Strain »

ضریب پواسون - ν (نو) $= \left| \dfrac{\text{lateral Strain}}{\text{axial Strain}} \right|$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \qquad \nu = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \Longrightarrow \boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}}$$

بارگذاری چند محوری :

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x \\ \dfrac{-\nu \sigma_y}{E} = \varepsilon_x \\ \dfrac{-\nu \sigma_z}{E} = \varepsilon_x \end{cases} \Longrightarrow$$

$$* \; \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

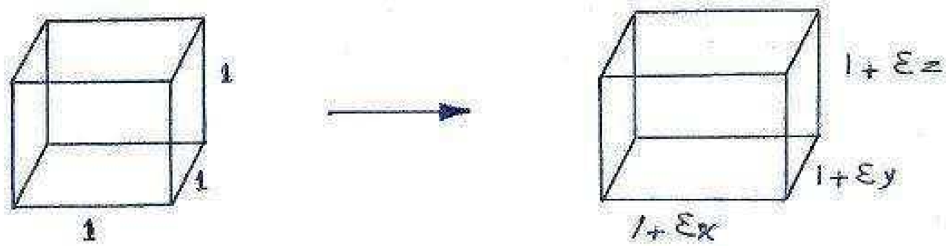
$$* \; \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$* \; \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E}$$

* این روابط تنها در ناحیه الاستیک صادق هستند و این (قانون - عمومی هوک) است.

« بررسی تغییر حجم » :

مکعب واحدی را در نظر می گیریم :



* حجم اولیه $= 1 \times 1 \times 1 = 1$

* حجم جدید $= (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$

بدلیل کوچکی

* حجم جدید $= 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \cancel{2\varepsilon_x\varepsilon_y} + \cancel{2\varepsilon_y\varepsilon_z} + \cancel{\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z} + \cancel{2\varepsilon_x\varepsilon_z} + \cancel{2\varepsilon_z\varepsilon_x}$

* حجم جدید $= 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

« اختلاف حجم واحد حجم $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ »

« $\Delta V = e \cdot V$ »

(اثبات) : $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\right]$

** $e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

حالت خاص « فشار هیدرواستاتیک » :

e_x و e_y و e_z هر سه منفی (فشاری) بوده و با هم برابرند.

$$* \quad e = -\underbrace{\frac{3(1-2\nu)}{E}}\, P$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$ مدول بالک (فشار)

$$* \quad e = -\frac{P}{K}$$

* K برای هر ماده‌ای مقدار ثابتی است چون E و ν مقادیر ثابتی برای هر ماده هستند. واحد K ، پاسکال است.

بحث : $e = -\frac{P}{K}$ باید همواره منفی باشد چون $E>0$ است پس باید $K>0$ باشد، $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ پس باید :

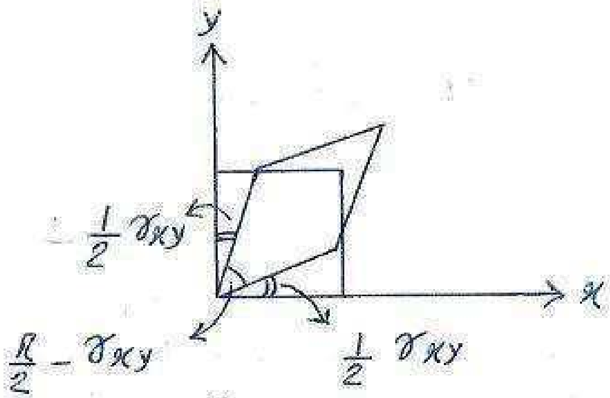
$$* \quad (1-2\nu)>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\nu < \frac{1}{2} \\ \nu = \left|\frac{L.S}{A.S}\right|\end{array}\right\} \Rightarrow$$

برای تمامی مصالح : $0 < \nu < \frac{1}{2}$

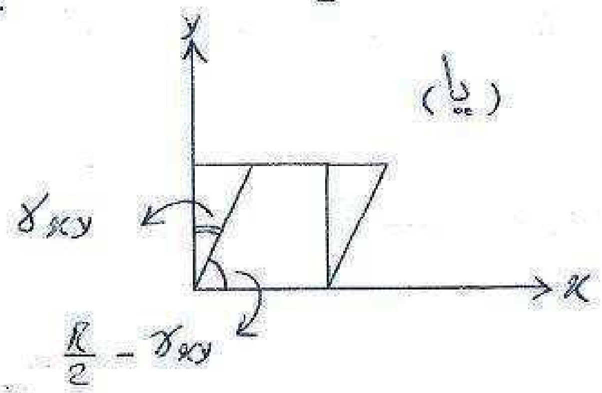
* برای مایعات تراکم ناپذیر بطور ایده‌آل « $\nu = \frac{1}{2}$ »

* تنش برشی تنها زوایای قطعه را تغییر می دهد امّا تغییر طول - نمی دهد (مثل قوطی کبریت که تحت نیروهای برشی قرار بگیرد).

حالت دو بعدی :



(یا)



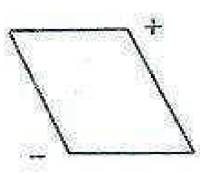
γ_{xy} : کرنش برشی

(shearing strain)

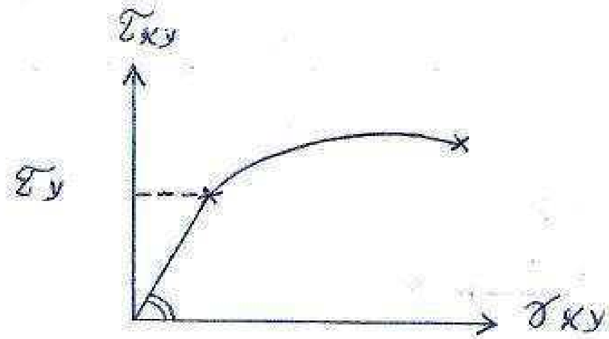
γ باید حتماً برحسب رادیان باشد.

* اگر طولها در جهت + x و + y باشند و کاهش زاویه داشته باشیم علامت کرنش برشی + است و اگر یکی از آنها تغییر کند علامت - است.

مثال -



منفی



* درجهٔ الاستیک :

$$\boxed{\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}}$$

G : مدول برشی (Pa)
(مدول صلبیت)

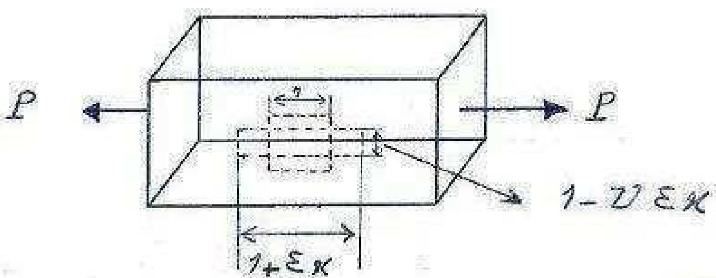
«مجموعه کلی قوانین هوک» :

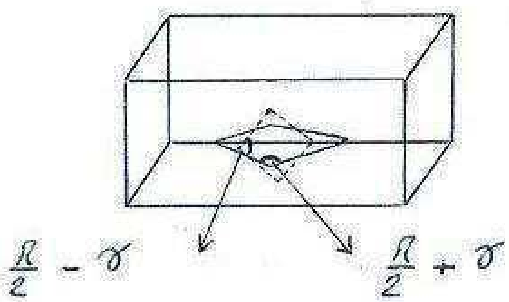
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\,\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\,\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\,\tau_{zx} \end{cases}$$

G از جنس E است و همواره :

$$\left(\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E\right)$$

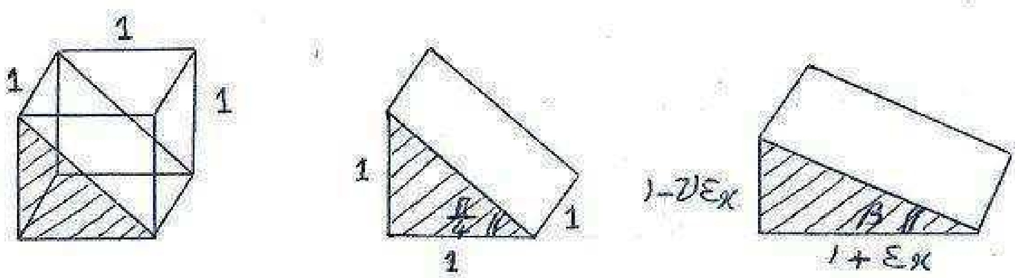
رابطهٔ E و G و ν :





جزوه درس مقاومت مصالح (۱) آقای مهندس همایونفر

دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)



$$* \quad \beta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}\right)$$

$$\tan\beta = \frac{\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma_m}{2}\right)}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\,\tan\frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \frac{\gamma_m}{2}}$$

(در مثلث) : $\tan\beta = \dfrac{1-\nu\,\varepsilon_x}{1+\varepsilon_x}$

$$\gamma_m = \frac{(1+\nu)\,\varepsilon_x}{1 + \frac{1-\nu}{2}\,\varepsilon_x} \Rightarrow \boxed{\gamma_m = (1+\nu)\,\varepsilon_x}$$

$$\frac{\tau_m}{G} = (1+\nu)\frac{\sigma_x}{E} \quad \leftarrow \quad \left(\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} \;\; \text{و} \;\; \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}\right)$$

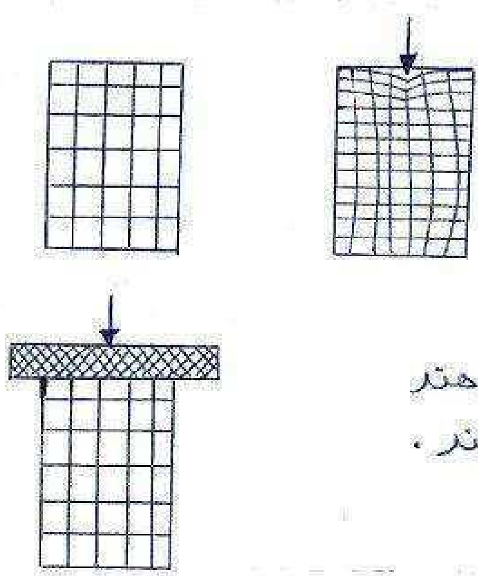
$$G = \frac{E}{1+\nu} \times \frac{\tau_m}{\sigma_x}$$

$$\left(\sigma_x = \frac{P}{A} \;\; \text{و} \;\; \tau_m = \frac{P}{2A}\right) \Rightarrow$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

m - علامت Max
و در زاویه $\frac{\pi}{4}$ است.

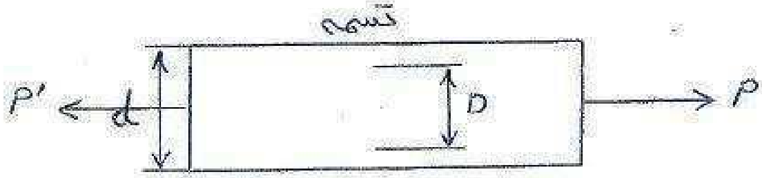
نحوه بارگذاری و تأثیر آن در تنش :



* به همین علت است که روی خاک فونداسیون می گذارند وروی آن هم صفحه فولادی صلب قرار می دهند وسپس تیر آهنها را برپا می کنند.

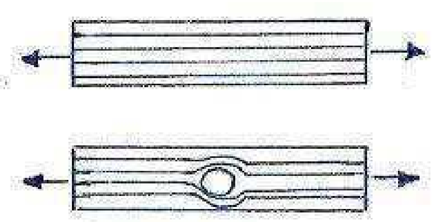
اصل سَنت وِنان - اگر بار بطور متمرکز وارد شود در ناحیه اعمال بار هیچ یک از این روابط صادق نیست و با آنها نمی توان آنالیز تنش کرد.

تمرکز تنش :

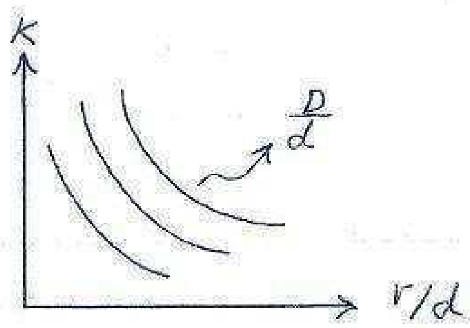


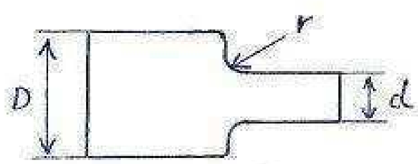
* اگر سطح Min را با (d_D) محاسبه کنیم و تنش بحرانی را یافته و تسمه را طراحی کنیم می بینیم که در عمل تسمه پاره می شود ، علت این امر (تمرکز تنش) است :

$$« \quad \sigma = \underbrace{K}_{\text{ضریب تمرکز تنش}} \frac{P}{A} \quad »$$



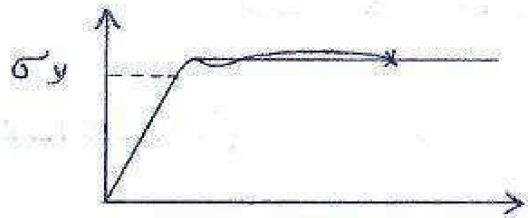
* باید حتی المقدور از گوشه های تیز ممانعت کرد و شعاعی مثل r به آن داد .





تغییر فرم پلاستیک :

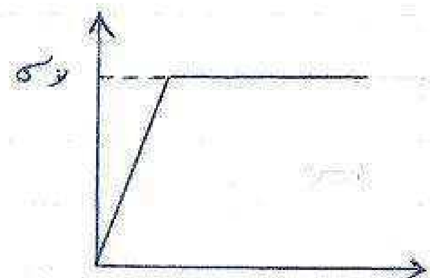
* معمولاً برای کارهای عادی مهندسی ناحیه پلاستیک را با یک خط یا منحنی تقریب می‌زنند از جمله مدل (الاستو پلاستیک):



مثال- میله‌ای را تحت کشش قرار می‌دهیم سپس بار را برمی‌داریم تغییر فرم دائمی آن چقدر است؟

$$\begin{cases} L = 500\ mm \\ A = 60\ mm^2 \\ E = 200\ GPa \\ \sigma_y = 300\ MPa \\ \Delta L = 7\ mm \end{cases}$$

ازدیاد طول

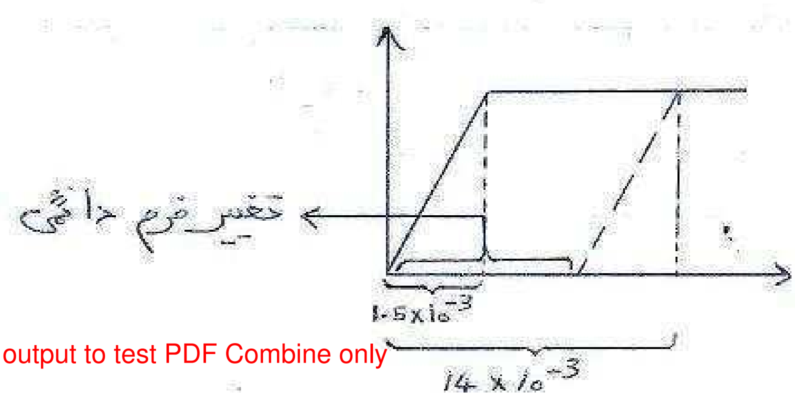


«مدل الاستو پلاستیک»

$$\frac{7}{500} = 14 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{300 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 1.5 \times 10^{-3}$$

کرنش حد تسلیم



$$\varepsilon_D = \varepsilon_c - \varepsilon_y = 14 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3}$$
$$\varepsilon_D = 12.5 \times 10^{-3}$$

$$\delta_D = L \cdot \varepsilon_D = 12.5 \times 10^{-3} \times 500$$

$(\delta_D = 6.25\ mm)$ (Diformation - D)

تنشهای باقیمانده - « Residual Stress »

۱- تأثیرات حرارت : فولادها در دمای بالا مدول الاستیسیته خود را از دست می‌دهند و نرم می‌شوند.

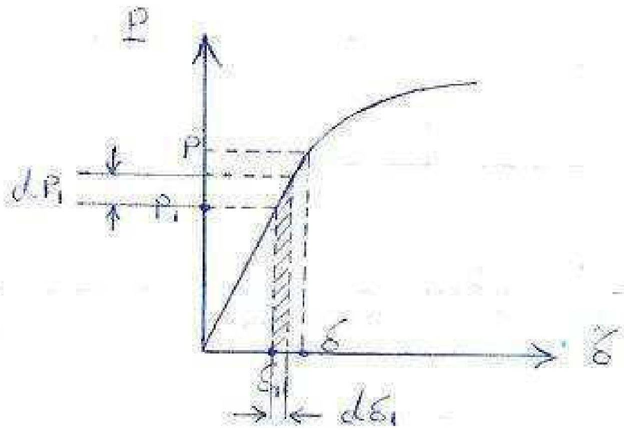
* اگر میل گرد کوچکی را برای بالابردن جسمی فولادی به آن جوش دهیم به علت بالارفتن دمای آن در موقع سرد شدن یک تنش باقیمانده در آن ذخیره می‌شود.

راه حل ۱- کل مجموعه را مدتی در کوره قرار دهیم تا تنش زدائی یا (Stress Relief) شود.

راه حل ۲- جسم بزرگ را پیش از جوشکاری بطور نقطعی (پیش گرم) کنیم.

انرژی کرنشی (Strain Energy) :

وقتی تغییر فرم داریم علت آن وجود نیرو است و این نیرو کاری انجام می دهد که ذخیره می شود . ما حالت بارگذاری استاتیکی را بررسی می کنیم (یعنی بار از صفر شروع شده به Max می رسد ، برعکس بارگذاری دینامیکی که بار یکمرتبه و به همراه انرژی جنبشی وارد می شود و بارگذاری ناگهانی که نیروی وزن یکمرتبه وارد می شود) .

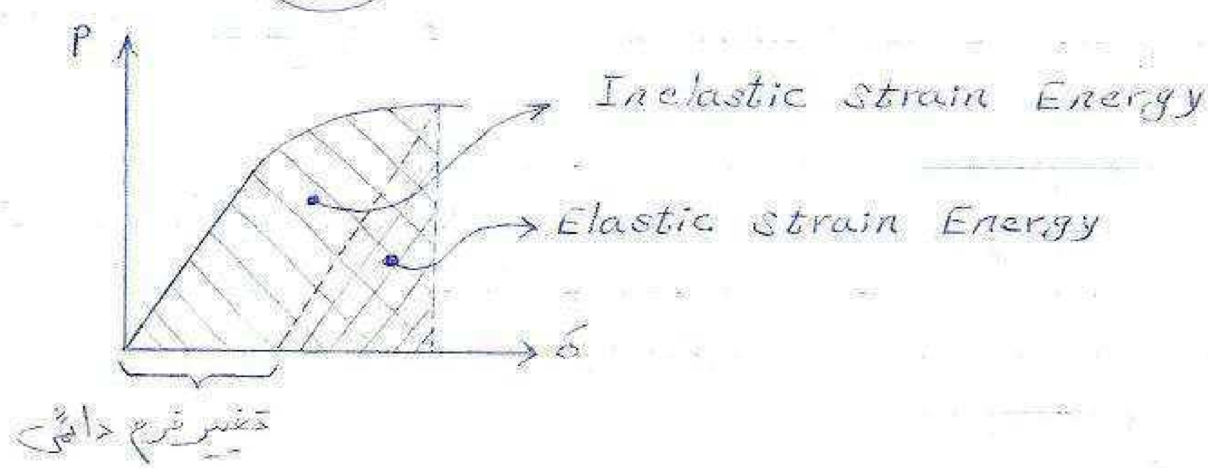


Load - deflection diagram

سطح زیر منحنی $= P_1 \, d\delta_1$

$$\boxed{W = \int_0^{\delta} P_1 \, d\delta_1}$$

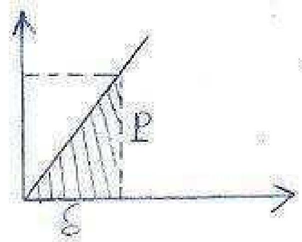
$$\boxed{U = W = \int_0^{\delta} P_1 \, d\delta_1}$$ انرژی کرنشی



در حالت پلاستیک :

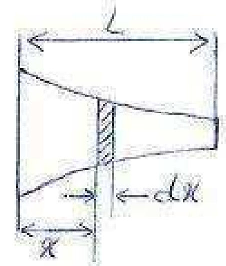
$$U = W = \frac{P\delta}{2}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow U = \frac{P^2 L}{2AE}$$



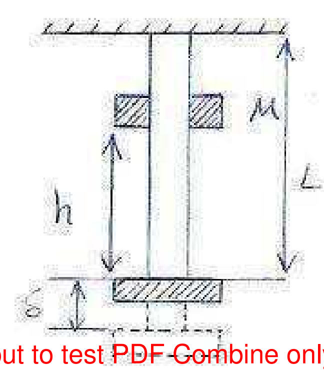
$$U = \frac{EA\delta^2}{2L}$$

در حالت سطح مقطع متغیر :



$$U = \int_0^L \frac{P^2_{(x)}\, dx}{2E\, A_{(x)}}$$

بارگذاری دینامیکی : « Dynamic Loading »



* فرض - ناحیه الاستیک است .

M پس از برخورد باز نمی گردد .

انرژی گرمائی تولید نمی شود .

$$E_p = Mgh = \frac{1}{2} M V^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gh}$$

$$\begin{cases} \text{انرژی پتانسیل کل} = W(h+\delta) = Mg(h+\delta) \\ \text{انرژی کرنشی} = \dfrac{EA\delta^2}{2L} \end{cases} \Rightarrow$$

$$W(h+\delta) = \frac{EA\delta^2}{2L} \quad \Rightarrow \quad EA\delta^2 - 2LW\delta - 2LWh = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{WL}{EA} + \left[\left(\frac{WL}{EA}\right)^2 + \frac{2WLh}{EA} \right]^{1/2}$$

(اما) $\delta_{static} = \dfrac{WL}{EA}$

$$\boxed{\delta = \delta_{st} + \left(\delta_{st}^2 + 2h\,\delta_{st}\right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta \simeq \sqrt{2h\,\delta_{st}}} \quad \Leftarrow \quad \delta_{st} \ll h$$

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\delta}{L} = \frac{W}{A} + \left[\left(\frac{W}{A}\right)^2 + \frac{2WhE}{AL} \right]^{1/2}$$

(اما) $\sigma_{static} = \dfrac{W}{A}$

تنش در حالت بارگذاری دینامیکی

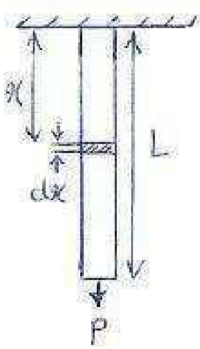
$$\boxed{\sigma = \sigma_{st} + \left(\sigma_{st}^2 + \frac{2hE}{L}\sigma_{st}\right)^{1/2}}$$

بارگذاری ناگهانی : تفاوت آن با حالت دینامیکی این است که $h=0$ است.

(suddenly applied loads)

$$h = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma = 2\sigma_{st}}$$

مثال -



A و E و γ و L

(P + وزن)

تحت تأثیر این نیروی متغیر انرژی کرنش چقدر است؟

$$U = \int_0^L \frac{P_x^2\,dx}{2EA_x} \qquad \left(\!\left(P_x = \gamma A (L-x) + P \right)\!\right)$$

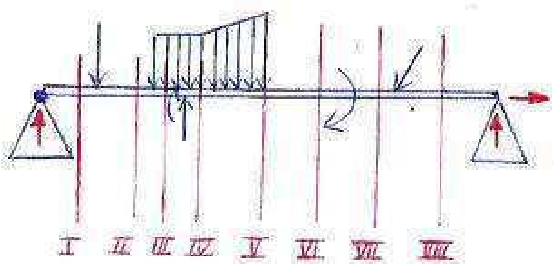
$$U = \int_0^L \frac{[\gamma A (L-x) + P]^2\,dx}{2EA} = \frac{\gamma^2 A L^3}{6E} + \frac{\gamma P L^2}{2E} + \frac{P^2 L}{2AE}$$

رسم دیاگرامهای نیروی برشی ، محوری و گشتاور خمشی :

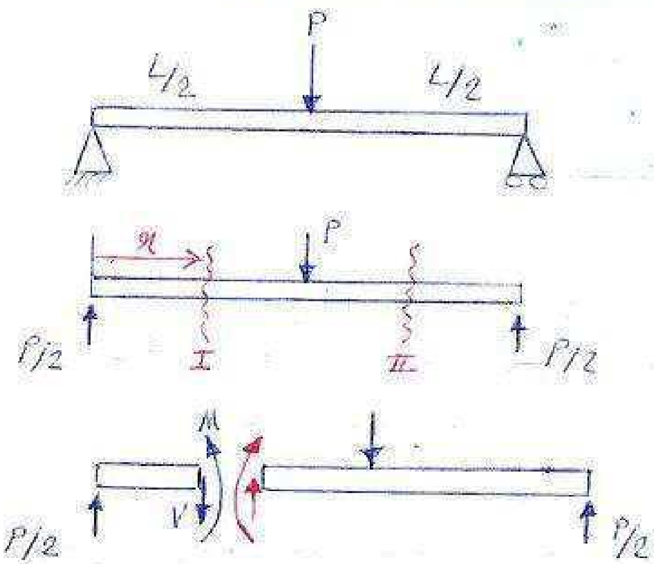
۱- پیکرهٔ آزاد را رسم کرده بجای گشتاور کوپل قرار می دهیم .

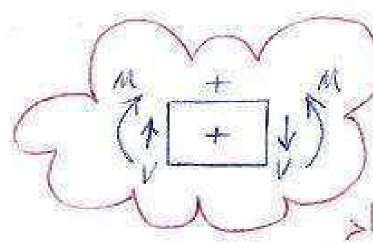
۲- عکس العمل تکیه گاهها را بدست می آوریم (تنها در این قسمت می توان بجای بار گسترده معادل متمرکز آن را قرار داد) .

۳- تشخیص مقاطعی که باید بررسی شود



مثال -





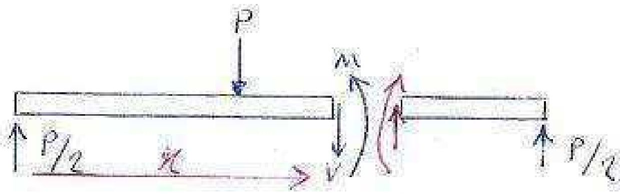
قرار داد

در مقطع اوّل : $V = P/2$

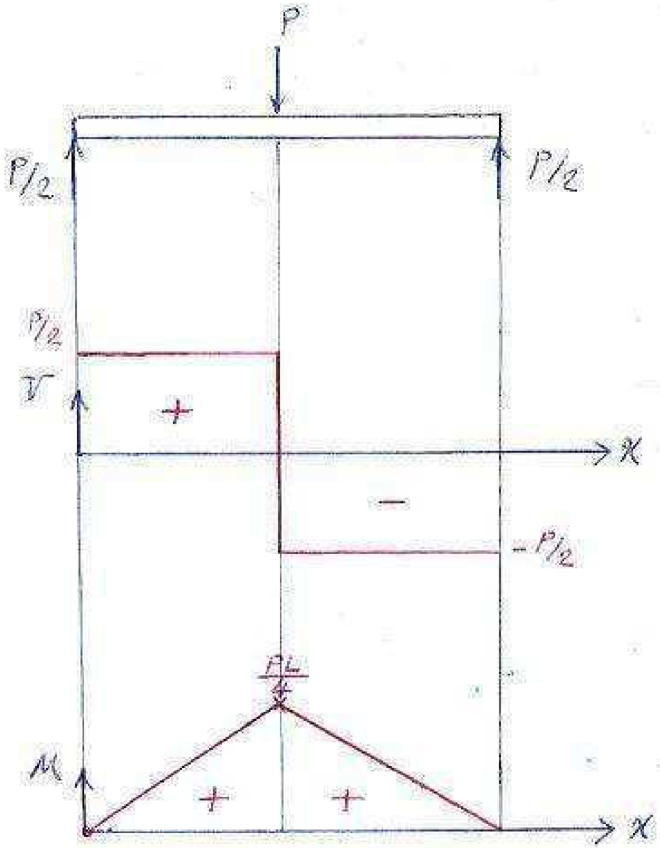
$M - P.x/2 = 0 \; +\circlearrowleft \Rightarrow M = P.x/2$

* گشتاور را حول نقطه ای می گیریم که روی مقطع قرار دارد .

* در مقطع دوم :



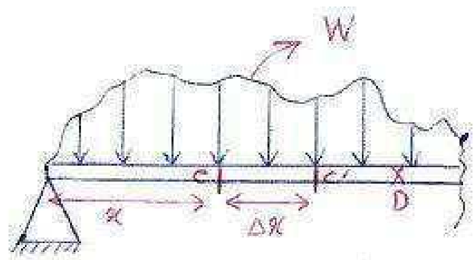
$$\text{II}\begin{cases} V = -\dfrac{P}{2} \\ M = P(L-x)/2 \end{cases}$$

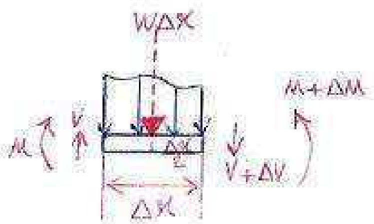


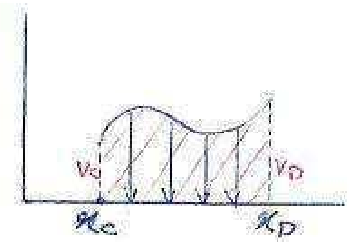
* اگر مقدار برش (+) باشد شیب دیاگرام خمش صعودی است و اگر مقدار برش (-) باشد برعکس .

* رابطه‌ای بین بار گسترده ، نیروی برشی و گشتاور خمشی :

تیری را در نظر می‌گیریم که بار گسترده نا مشخصی که می‌توان آن را فرمول کرد بر آن وارد می‌شود .







مجموع نیروها در جهت قائم : $V-(V+\Delta V)-W\Delta x=0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=\frac{-W\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow \frac{dV}{dx}=-W$$

* یعنی در هر نقطه شیب دیاگرام نیروی برشی برابر با منفی بار گسترده در همان نقطه است.

* اگر بین نقاط دلخواه C و D انتگرال گرفته شود:

$$V_D-V_C=-\int_{x_C}^{x_D}W\,dx$$

* یعنی اختلاف نیروی برشی میان دو نقطه برابر است با سطح زیر منحنی بار گسترده بین همان دو نقطه و با علامت مخالف.

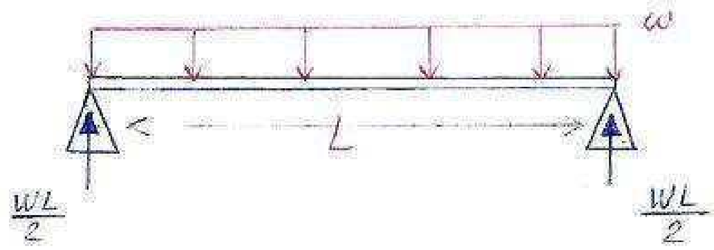
مجموع گشتاورها حول C' : $\sum M_{C'}=0$

$$(M+\Delta M)-M-V\Delta x+W\Delta x\times\frac{\Delta x}{2}=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta x}=\frac{V\Delta x}{\Delta x}-\frac{\frac{1}{2}W(\Delta x)^2}{\Delta x}\Rightarrow \frac{dM}{dx}=V$$

$$\boxed{M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx}$$

مثال -



کافیست نیروی برشی را در تکیه گاه حدس زده و از فرمول استفاده کنیم.

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx \Rightarrow$$

$$V = V_A - wx \Rightarrow V = \frac{wL}{2} - wx$$

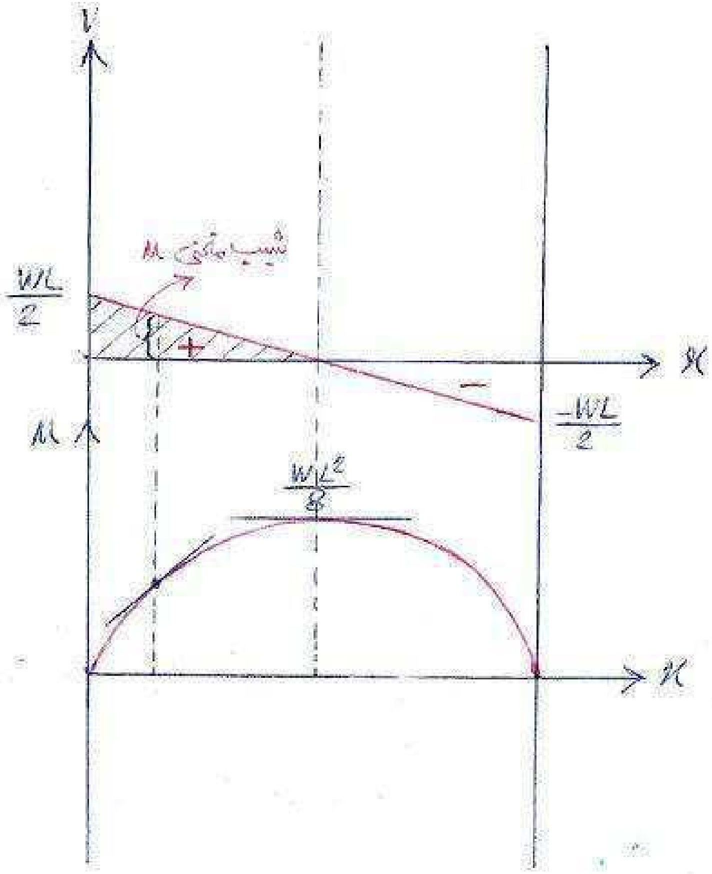
$$\Rightarrow \boxed{V = w\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$ در تمام نقاط تیر بسته به x.

گشتاور هم در تکیه گاه صفر است (چون تکیه گاه درگیر نیست):

$$M - M_A = \int_0^x V\,dx = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{M = \frac{w}{2}\left(Lx - x^2\right)}$$ معادله یک سهمی

(یک واحد) - (درجه بار گسترده $<$ درجه V $<$ درجه M) -



« نمودارها »

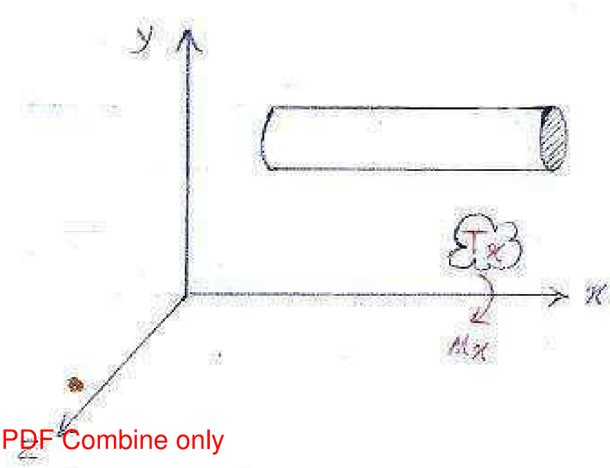
$V > 0 \leftarrow$ شیب M صعودی

$V < 0 \leftarrow$ شیب M نزولی

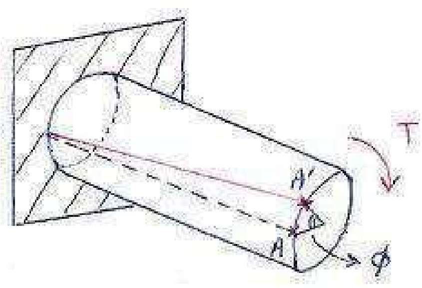
$* \quad M_{x=\frac{L}{2}} = M_{max} = \frac{WL^2}{8}$

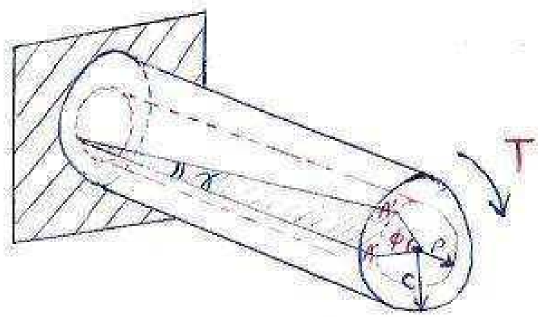
* اگر شیب برش منفی باشد تقعر منحنی M به سمت مقادیر منفی است و اگر شیب برش مثبت باشد برعکس. نسبت بارگسترده به دیاگرام V هم به همین صورت است.

« پیچش » « Torsion »



پیچش مقاطع دایره‌ای : حول محور اصلی جسم (x)





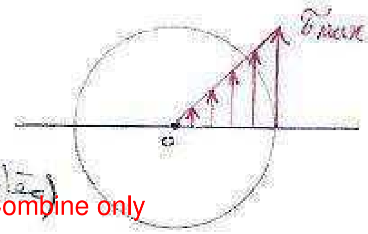
γ - کرنش زاویه‌ای

$* \quad \tau = G\gamma$ قانون هوک

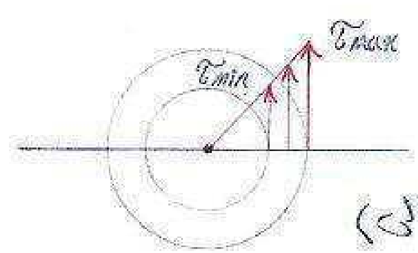
$$\begin{cases} \widehat{AA'} = \rho\phi \\ \widehat{AA'} = \gamma L \end{cases} \Rightarrow \quad \rho\phi = \gamma L \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \dfrac{\rho\phi}{L} \\[2ex] \gamma_{max} = \dfrac{c\phi}{L} \end{array} \right\} \xrightarrow[\phi]{\text{با حذف}} \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$

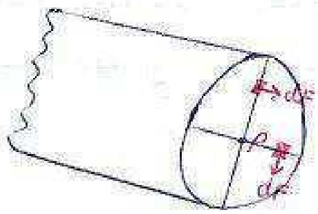
$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{max} \Rightarrow \tau' = \frac{\rho}{c}\tau_{max}$$ رابطه خطی



(مقاطع توپر)



(مقاطع توخالی)



استاتیک : $T = \int \rho \, dF$, $dF = \tau \, dA$ $\rightarrow$

$$\int \rho (\tau \, dA) = T$$

$$\int \rho \left(\frac{\rho}{c} \tau_{max} \right) dA = T$$

$$\frac{\tau_{max}}{c} \underbrace{\int \rho^2 \, dA}_{\text{ممان قطبی } (J)} = T$$

چون J برای دایره توپر $\frac{1}{2}\pi c^4$ و برای دایرهٔ توخالی $\frac{1}{2}\pi (c_2^4 - c_1^4)$ است ، لذا مسئله تنها شکل هندسی می‌گیرد و لذا : $\Rightarrow$

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot c}{J}$$

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$$

* اگر در دایره توخالی بجای ρ شعاع داخلی را قرار دهیم τ_{min} را می‌دهد و با قرار دادن شعاع خارجی τ_{max} بدست می‌آید.

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$$

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{T \cdot c}{J \cdot G}$$

$\rightarrow$

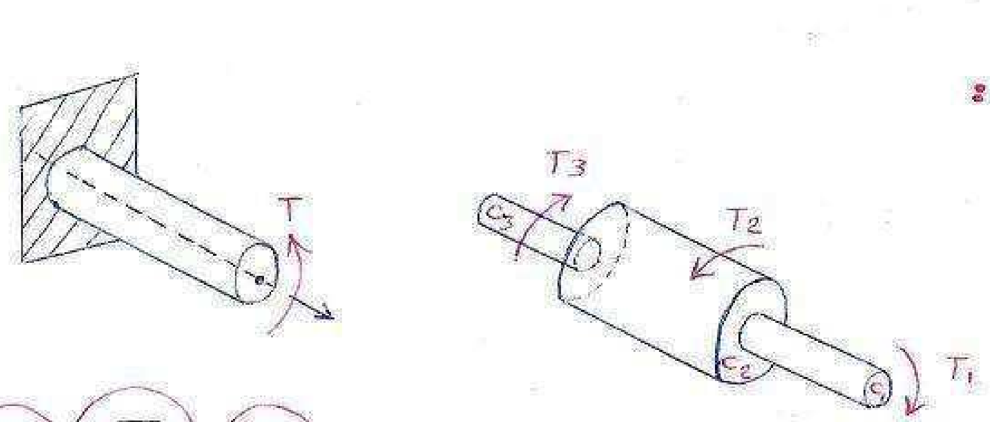
$$\phi = \frac{T L}{G \cdot J}$$

زاویه پیچش

G - مشخصه مقاومت مصالح مقطع .

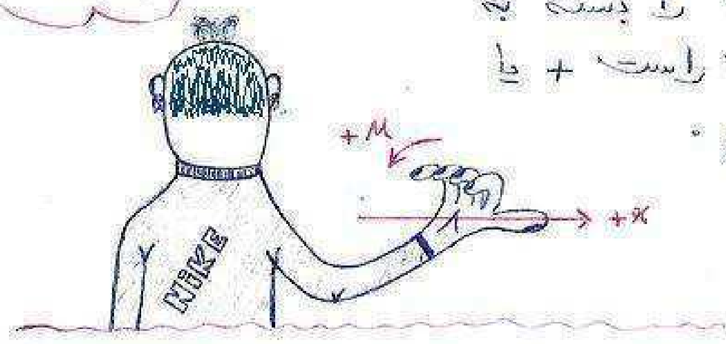
J - مشخصه هندسی مقطع .

نکته :

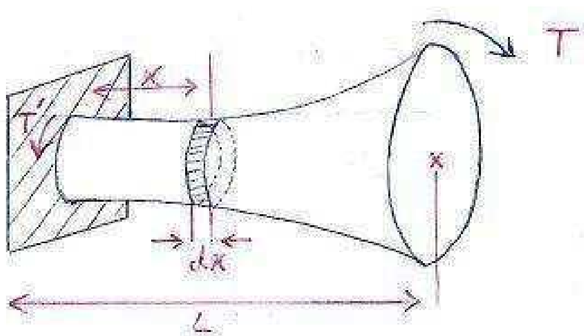


$$\phi = \sum \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

* علامت T ها را بسته به قانون دست راست + یا - می گیریم .

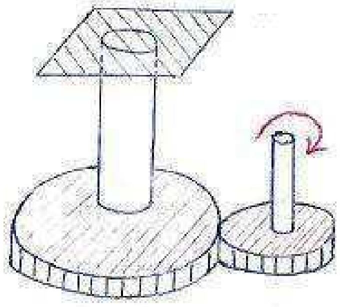


نکته :



$$d\phi = \frac{T\,dx}{JG}$$

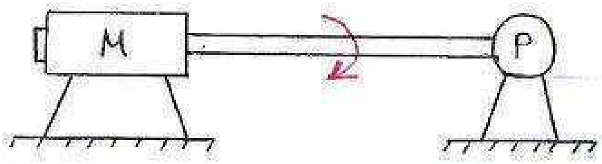
$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{J(x)\,G}$$



* چرخنده ها -

زوایای پیچش باهم جمع می شوند.

محورهای انتقال قدرت : (Transmission shafts)



* توان و دور موتور و نوع جنس محور را داریم (یا قطر محور) لزامی توان هر مشخصه‌ای از محور را که در طراحی آن لازم است محاسبه نمود.

$$\begin{cases} P = T\omega \\ \omega = 2\pi f \end{cases} \Rightarrow \quad P = 2\pi f T \qquad T = \frac{P}{2\pi f}$$

f - فرکانس

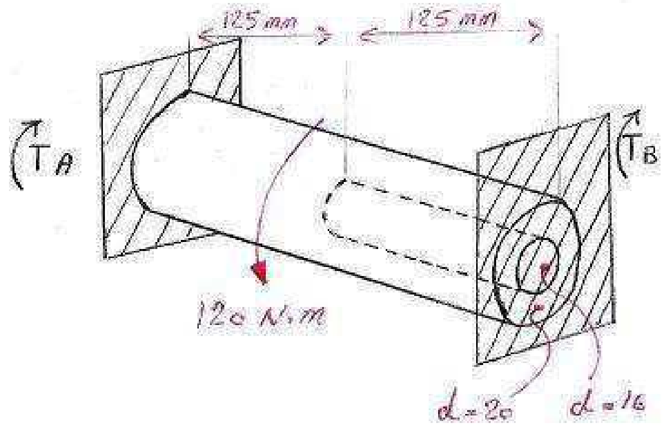
$$\tau_{max} = \frac{T \cdot c}{J} = \frac{T}{J/c} \rightarrow J/c = \frac{T}{\tau_{max}}$$

از روی جنس بدست می آید

$$J/c = \frac{\frac{1}{2}\pi c^4}{c} = \frac{1}{2}\pi c^3 \rightarrow$$ c محاسبه می شود

نکته - در محورهای توخالی باید J/c_2 را بررسی کنیم زیرا - حداکثر تنش برشی در آنجا پدید می آید.

مسائل نامعین استاتیکی :



مثال- در دو تکیه گاه A و B گشتاورها را محاسبه کنید.

(استاتیک) : $* \; T_A + T_B = 120 \;\; N.m$ (I)

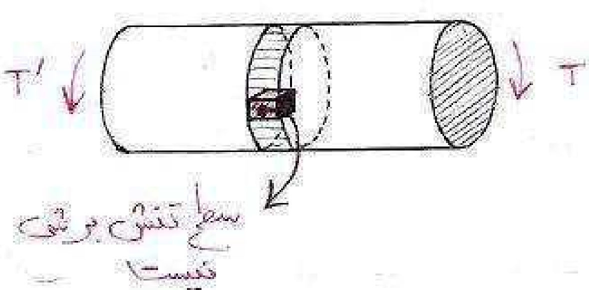
$* \; \phi = \phi_1 + \phi_2 = 0 \longrightarrow$

$\dfrac{T_A L_1}{J_1 G} - \dfrac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \longrightarrow \; * \; T_B = \dfrac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$ (II)

$L_1 = L_2 = 125 \; mm \longrightarrow$

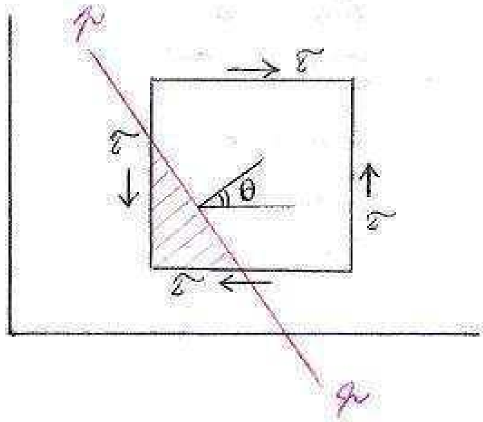
$T_A = 75.5 \;\; N.m$
$T_B = 44.5 \; N.m$

المانهای چرخیده :



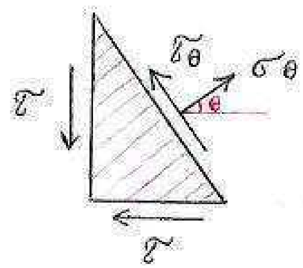
اگر المان موازی سطح مقطع باشد فقط تنش برشی روی آن پدید می آید و اگر المان از حالت موازی منحرف شود - تنش نرمال هم پدید می آید.

Sample output to test PDF Combine only

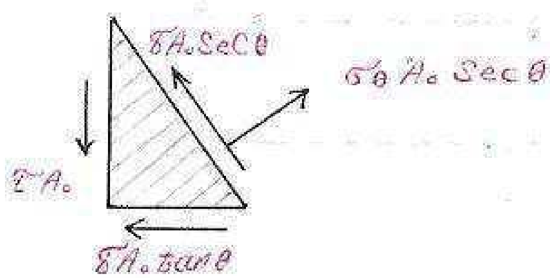


* زاویه هر صفحه همواره زاویه آن با سطح افق است.

* المان نشان داده شده یک بعد سوم هم دارد.



نیروها :



جمع نیروها در جهت σ_θ : $\sigma_\theta A_0 \sec\theta = \tau A_0 \sin\theta + \tau A_0 \tan\theta \cos\theta$

$\rightarrow \quad * \ \sigma_\theta = 2\tau \sin\theta \cos\theta$

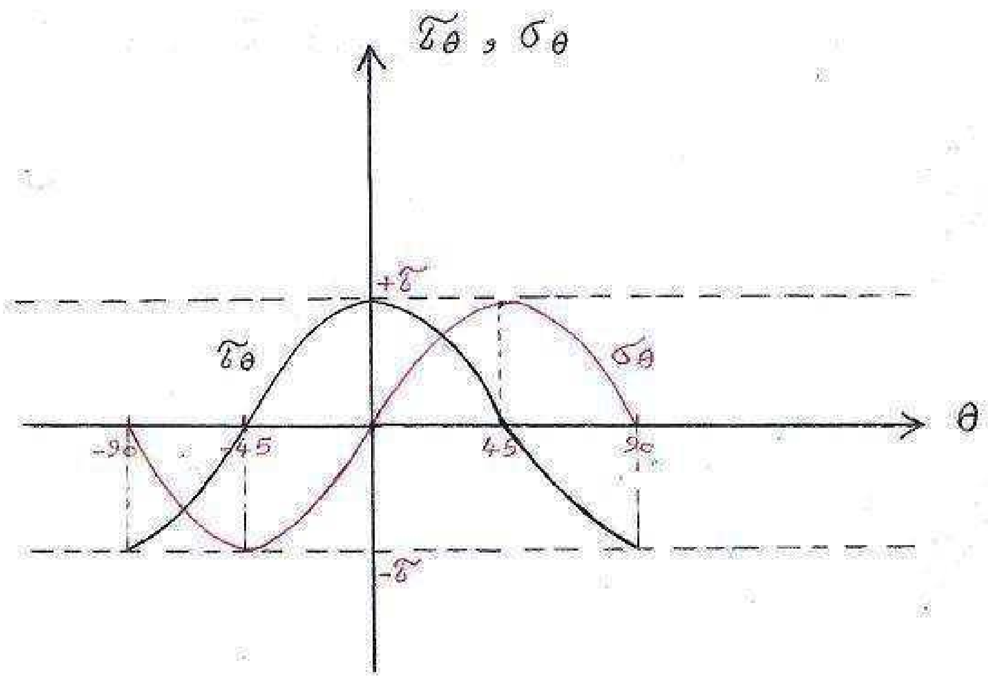
جمع نیروها در جهت τ_θ : $\tau_\theta A_0 \sec\theta = \tau A_0 \cos\theta - \tau A_0 \tan\theta \sin\theta$

$* \ \tau_\theta = \tau(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$$\sigma_\theta = \tau \sin 2\theta$$
$$\tau_\theta = \tau \cos 2\theta$$

بحث -

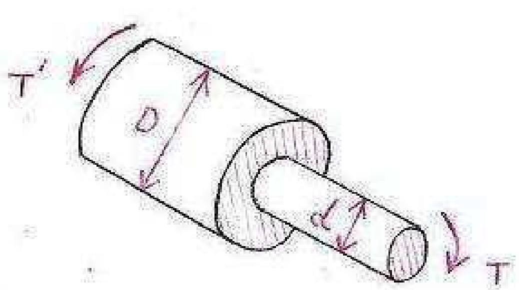
$$\begin{cases} \theta = 0 & \rightarrow & \sigma_\theta = 0 & \tau_\theta = \tau \\ \theta = 90^\circ & \rightarrow & \sigma_\theta = 0 & \tau_\theta = -\tau \\ \theta = 45^\circ & \rightarrow & \sigma_\theta = \tau & \tau_\theta = 0 \\ \theta = -45^\circ & \rightarrow & \sigma_\theta = -\tau & \tau_\theta = 0 \end{cases}$$

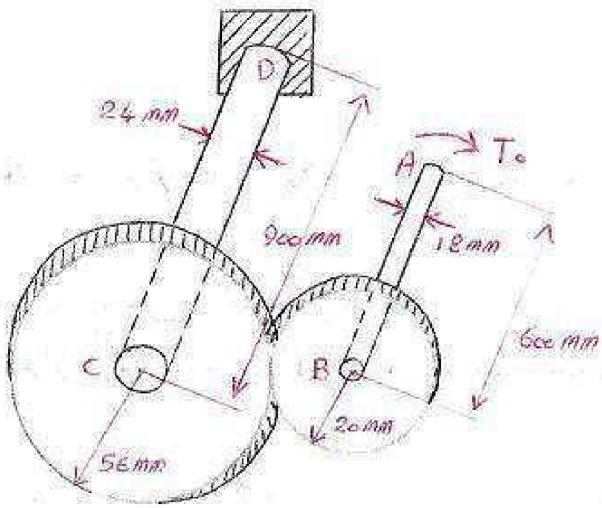


نکته -

$$\tau = K \frac{T.C}{J}$$

K - ضریب تمرکز تنش برای گذر از ناحیه خطرناک.





مثال -

1- حداکثر T_0 چقدر ؟

2- زاویه پیچش A ؟

$$\begin{cases} G = 80\ GPa \\ \tau_{all} = 55\ MPa \end{cases}$$

$$T_{CD} = \frac{56}{20} T_0 \rightarrow (T_{CD} = 2.8\ T_0)$$

در محور AB :

$$\tau = \frac{T_0 C}{J} \rightarrow 55\ MPa = \frac{T_0 (0.009)}{\frac{1}{2}\pi (0.009)^4} \rightarrow$$

$$T_0 = 63\ N.m \quad \text{I}$$

در محور CD :

$$\tau = \frac{T_{CD} \cdot C}{J} \rightarrow$$

$$55\ MPa = \frac{2.8\ T_0\ (0.012)}{\frac{1}{2}\pi (0.012)^4} \rightarrow T_0 = 53.3\ N.m \quad \text{II}$$

$$(\text{I}, \text{II}) \rightarrow * \; T_0 = 53.3\ N.m$$ قابل قبول

در محور AB :

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB} \cdot L}{G \cdot J} = \frac{53.3 \times 0.6}{80\ GPa \times \frac{\pi}{2} (0.009)^4}$$

$$\phi_{A/B} = 0.03\ Rad = 2.22^\circ$$

در محور CD :

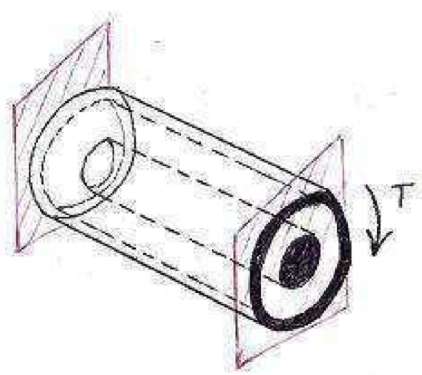
$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD} \cdot L}{G \cdot J} = \frac{2.8 \times 53.3 \times 0.9}{80\ GPa \times \frac{\pi}{2} (0.012)^4}$$

$$\phi_{C/D} = 0.0515\ Rad = 2.95^\circ$$

$$\phi_A = 2.8 \times 2.95 + 2.22 \quad \Rightarrow \quad * \ \phi_A = 10.48^\circ$$

** تعداد دور کوچکتره به نسبت قطرها بیشتر است.

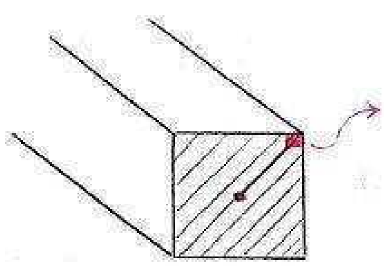
** مقدار گشتاور کوچکتره به نسبت قطرها کمتر است.



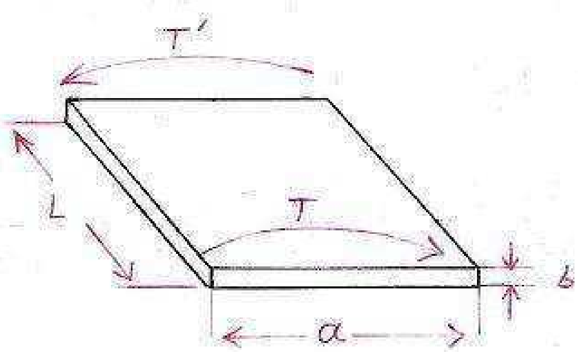
مثال- لوله و میل گرد هر یک چه مقدار گشتاور را انتقال می دهند؟

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = T \\ \phi_1 = \phi_2 \end{cases}$$

« مقاطع غیر دایره ای » :



* تنش در دورترین شعاع صفر است (برعکس مقاطع دایره ای شکل)

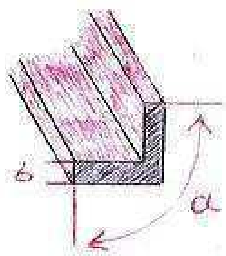


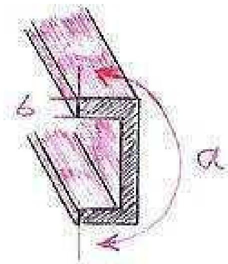
* $\tau_{max} = \dfrac{T}{C_1 a b^2}$

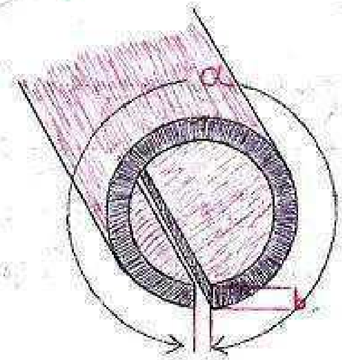
* $\phi = \dfrac{TL}{C_2 a b^3 G}$

a/b	c_1	c_2
⋮	⋮	⋮

* اگر a نسبت به b خیلی بزرگ شود (مثلاً $50mm$ به $3mm$) –
۳ نگاه $C_1 = C_2 = 0.333$ و می توان مقاطعی به شکل نبشی یا –
ناودانی یا دایره ای کامل را با همین فرمولها حل کنیم .

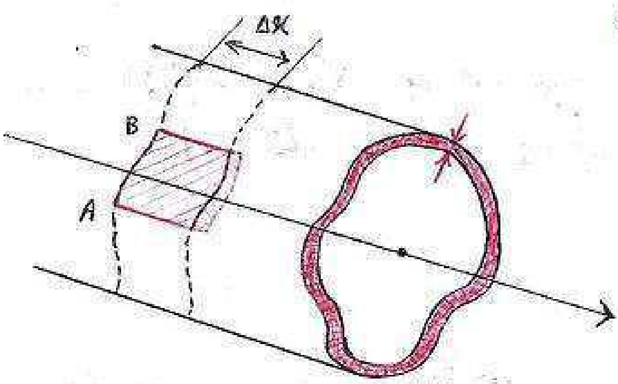


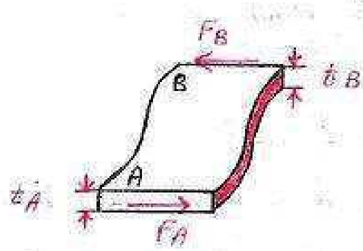




« مقاطع باز جدار نازک »

« محورهای توخالی جدار نازک »





$$F_A - F_B = 0 \longrightarrow F_A = F_B$$

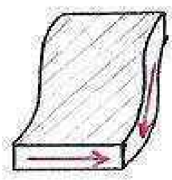
$$\left.\begin{aligned} F_A &= \tau_A \cdot t_A \, \Delta x \\ F_B &= \tau_B \cdot t_B \, \Delta x \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad (\tau_A \, t_A = \tau_B \, t_B)$$

چون A و B نقاط دلخواهی هستند لذا :

$$\tau . t = Const \rightarrow$$

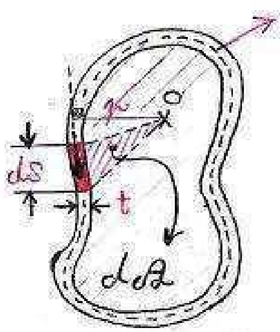
$$q = \tau . t$$ (shear flow)

جریان برش



* این دو برش باهم برابرند زیرا در یک المان بر روی دو وجه قرار دارند و به هم نزدیک می شوند .

نکته - « $d\mathcal{A}$ روی این منحنی بسته تعریف می شود . »



** المان کوچک به ضخامت t و طول ds در نظر می گیریم .

* $dA = t\,ds$

$$dF = \tau . dA = \tau . (t\,ds) = (\tau . t)\,ds = q\,ds$$

$$dM_o = r\,dF = r\,(q\,ds) = q\,\underbrace{(r\,ds)}_{2\,d\mathcal{A}} = 2q\,d\mathcal{A}$$

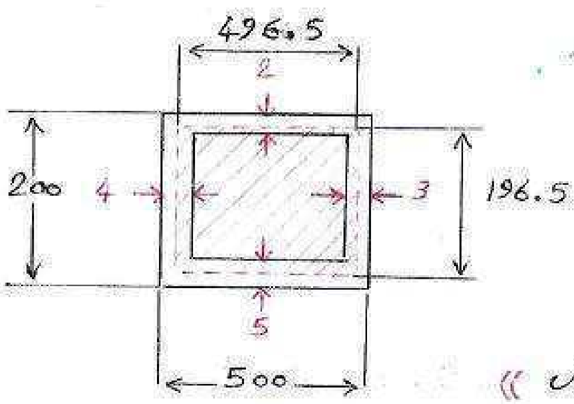
$$T = \oint dM_o = \oint 2q\, dA = 2qA$$

$$\left.\begin{aligned} T &= 2qA \\ q &= \tau \cdot t \\ T &= 2\tau t A \end{aligned}\right\} \rightarrow \tau = \frac{T}{2tA}$$

$$\phi = \frac{TL}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

* زاویه پیچش در محورهای توخالی جدار نازک

مثال -



« $A = 496.5 \times 196.5$ »

مثال - « از محورهای انتقال قدرت »

$$\begin{cases} \text{قدرت} = 5\ hp \\ \text{دور} = 3600\ rpm \\ \tau_{all} = 8500\ psi \end{cases}$$

* روتور این موتور چقدر باید طراحی شود؟

$P = 5 \times 6600 = 33\,000 \quad in.lb/s$

$f = \frac{3600}{60} = 60 \quad Hz = 60 \quad [1/s]$

$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{33\,000}{2\pi(60)} = 87.54 \quad lb.in$

$\tau = \frac{T.c}{J} = \frac{T}{J/c} \qquad * \; J/c = \frac{T}{\tau_{all}} = \frac{87.54}{8500} = 10.3 \times 10^{-3}$

$J/c = \frac{1}{2}\pi c^3 = 10.3 \times 10^{-3} \longrightarrow C = 0.1872 \quad in$

مثال -

لوله با قطر خارجی $50 \; mm$

$P = 100 \quad kW$

$f = 20 \quad Hz$

$\tau_{all} = 60 \quad MPa$

ضخامت لوله $= ?$

$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{100 \times 10^3}{2\pi \times 20} = 795.8 \quad N.m$

$\tau = \frac{T C_2}{J} \longrightarrow J/C_2 = \frac{T}{\tau_{all}} = \frac{795.8}{60 \times 10^6}$

$= 13.26 \times 10^{-6} \quad m^3$

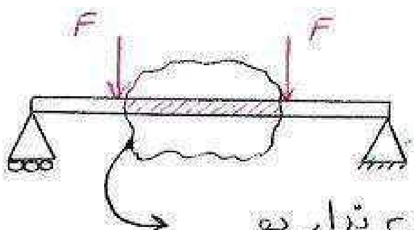
$J/C_2 = \frac{J}{25 \times 10^{-3}} = \frac{\frac{1}{2}\pi\left((25 \times 10^{-3})^4 - C_1^4\right)}{25 \times 10^{-3}} = 13.26 \times 10^{-6}$

$C_1 = 20.6 \quad mm \longrightarrow$ ضخامت $= C_2 - C_1$

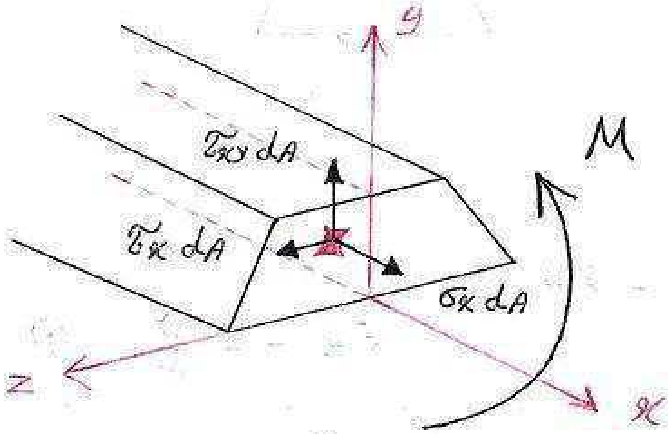
« خمش » « Pure Bending »

« خمش خالص »

1 - قطعه دارای صفحه تقارن است.
2 - گشتاور خمشی در این صفحه تقارن قرار دارد.
3 - شکل قطعه در سرتاسر آن منشوری و یکنواخت است.
4 - جنس قطعه همگن و یکنواخت است.



* در این ناحیه نیروی برشی نداریم و تنها گشتاور خمشی داریم که آن را گشتاور خمشی خالص گویند.

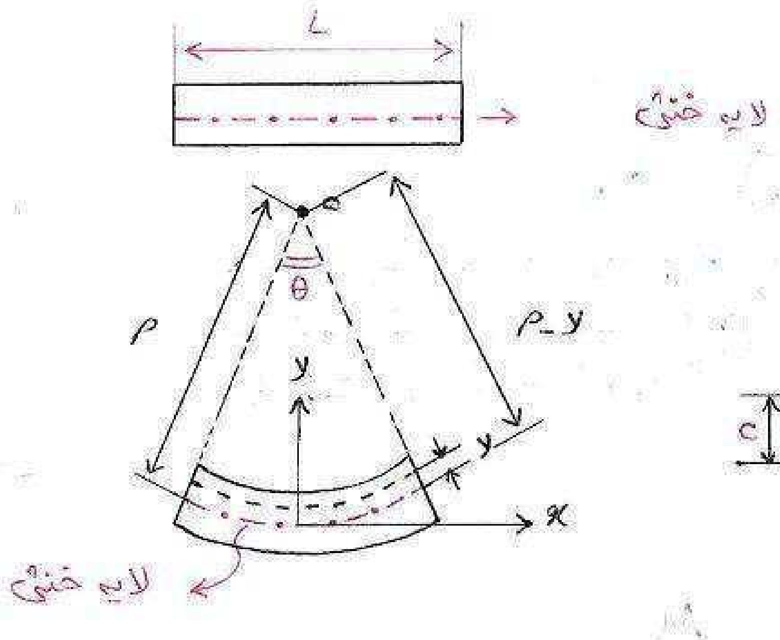


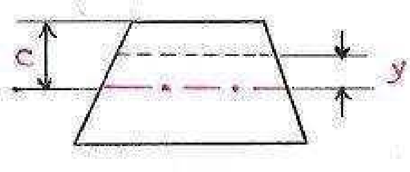
$$\sum F_x = 0 \longrightarrow \int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\sum M_y = 0 \longrightarrow \int z \, \sigma_x \, dA = 0$$

$$\sum M_z = 0 \longrightarrow \int -y \, \sigma_x \, dA = M$$

* یعنی هم تنش کششی داریم وهم تنش فشاری .





(المان)

$$\delta = L' - L$$

$$\delta = (\rho - y)\,\theta - \rho\theta = -y\theta$$

$$\varepsilon_x = \frac{-y\theta}{\rho\theta} \longrightarrow \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (1)$$

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \xrightarrow{(1)} \boxed{\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\,\varepsilon_m}$$

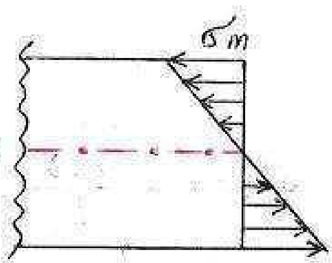
* یعنی در تار خنثی کرنش صفر است ، بالای آن کاهش طول و در زیر آن افزایش طول داریم .

$$E \varepsilon_x = -\frac{y}{c} E \varepsilon_m \longrightarrow$$

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m$$

(N.A) تار خنثی

Natural axis



محل تار خنثی :

* $\int \sigma_x \, dA = 0$

$$\int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = 0$$

$$-\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA = 0 \xrightarrow{\frac{\sigma_m}{c} \neq 0} \int y \, dA = 0$$

ممان اول سطح
نسبت به محور x

اگر $\int y \, dA = 0$ باشد باید محور x از مرکز سطح بگذرد و چون محور x همان (تار خنثی) است پس موقعیت تار خنثی بدین گونه است که از مرکز سطح می گذرد .

Sample output to test PDF Combine only

مقدار تنش قائم :

$$\int -y\,\sigma_x\,dA = M$$

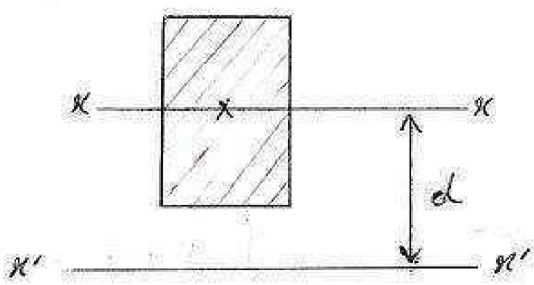
$$\int -y\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right)dA = M$$

$$\frac{\sigma_m}{c}\int y^2\,dA = M$$

ممان اینرسی سطح مقطع

$$\boxed{\sigma_m = \frac{Mc}{I}} \qquad \boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$

قضیه انتقال :



$$\begin{cases} I_{xx} = \dfrac{bh^3}{12} \\ I_{x'x'} = \dfrac{bh^3}{12} + Ad^2 \end{cases}$$

نکته -

$$* \quad \sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c}$$

که مدول مقطع

$$\boxed{\sigma_m = \frac{M}{S}}$$

* در طراحی اجزاء تحت خمش
سعی ما افزایش ممان اینرسی است.

Sample output to test PDF Combine only

شعاع : ρ

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c} \quad \text{و} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} \longrightarrow$$

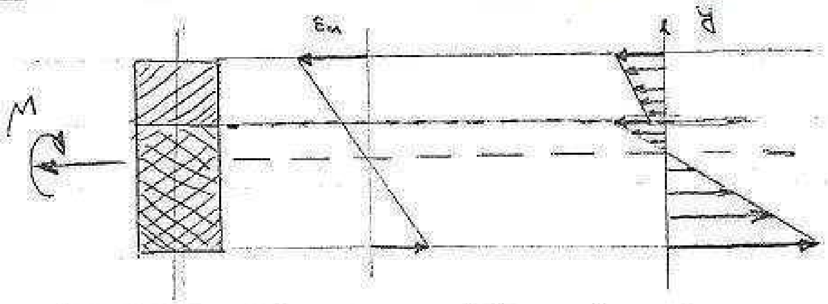
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

شرکت مهندسی پتروپالامحور

پتروپالامحور پیشتاز در ارائه خدمات مهندسی و متعهد به کیفیت

PPM , Dedicated For The Best Quality

دیاگرام تغییرات تنش:



$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \varepsilon_x E_1 \\ \sigma_2 = \varepsilon_x E_2 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = -\frac{E_1 y}{\rho}$$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

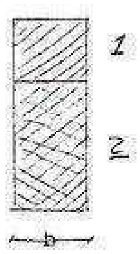
المان مانند dA را در ناحیه 1 و 2 در نظر می‌گیریم نیروهایی که وارد بر المان برابر است با:

$$dF_1 = \sigma_1\, dA = -\frac{E_1 y}{\rho}\, dA$$

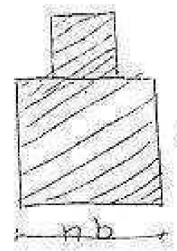
$$dF_2 = \sigma_2\, dA = -\frac{E_2 y}{\rho}\, dA \xrightarrow{\frac{E_2}{E_1} = n} -n\frac{E_1 y}{\rho}\, dA$$

وقتی نیرو n برابر باشد پس تنش نیز n برابر می‌شود پس برای بدست آوردن تنش برابر سطح را n برابر فرض می‌کنیم پس برای این n سطح را از یک جنس بتوان فرض کرد باید:

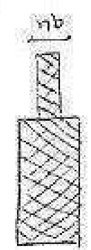
در اجسام مرکب (دو یا چند جسم تشکیل شده است) معمولاً الاستیسیته را محاسبه کرده و سطح یکی را در n ضرب می‌کنیم تا سطح مقطع معادل بدست آید (سطح را طوری افزایش می‌دهیم n ارتفاع یا همان y افزایش نیابد) مثل شکل:



الف) $\frac{E_2}{E_1} = n$ پایین را به بالا تبدیل کنیم



ب) $\frac{E_1}{E_2} = n$ بالایی را به پایینی تبدیل کنید



سپس مثل مسائل ساده خمش اعداد را می‌توان بدست آورد.

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

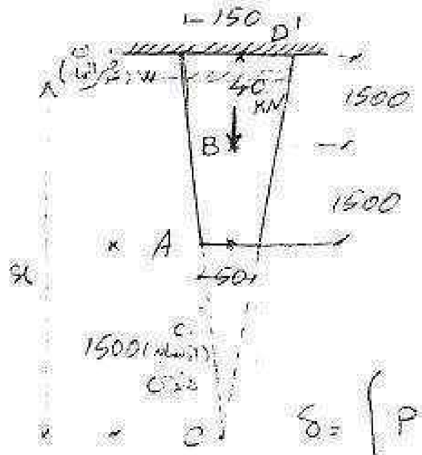
I ← ممان اینرسی سطح مقطع معادل

تبصره: اگر تنش را در ناحیه تغییر یافته محاسبه شده باشد، جواب حاصل را باید یکبار دیگر ضرب در n کرد تا عدد واقعی بدست آید در غیر این صورت همان عدد جواب است.

مثال) قطعه از ورق با ضخامت $25\,mm$ بریده شده

(فقط بارگذاری محوری) $E = 200\ GPa$

(از نیروی وزن صرف نظر شده) $\delta_A = ?$



تنها متغیر سطح مقطع است چون وزن ثابت است

المان ما dx در نظر می گیریم و مبدأ مختصات را C فرض می کنیم

$$\delta = \int P \frac{dx}{AE}$$

از تشابه مثلث: $\frac{50}{w} = \frac{AC}{x} \rightarrow w = \frac{1}{30}x$

می دانیم: $A = w \times 25$

$$\Rightarrow A = \frac{25}{30}x \rightarrow \boxed{A = \frac{5}{6}x}$$

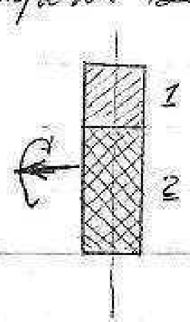
$$\rightarrow \delta = \int \frac{\overset{40}{P}\, dx}{\underset{\frac{5}{6}x}{A}\,\underset{200\ GPa}{E}}$$

* حدود انتگرال از 3000 تا 4500 می باشد زیرا اگر مبدأ را C فرض کنیم نقطه B در 3000 قرار دارد و چون اثر نیرو فقط در محدوده B تا D است پس حدود در همین فاصله تغییر می کند.

$$\rightarrow \delta = \frac{P}{E}\int_{3}^{4.5} \frac{dx}{\frac{5}{6}x} \rightarrow \delta = .0973$$

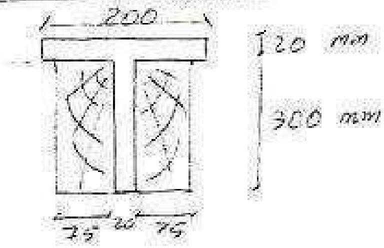
تبصره: اگر نیروی وزن هم داشتیم باید دو تا انتگرال می گرفتیم. یعنی انتگرال ها را جداگانه محاسبه کرده طبق اصل سوپر پزیشن این دو انتگرال را با هم جمع می کنیم.

* بررسی تیری که از دو یا چند جسم مختلف تشکیل شده باشد (تیر مرکب Composite Beam)



چون محل جوش دو جسم از هم جدا نمی شود کل همین خمش تا مرحله کرنش به همان شکل قبل ادامه پیدا می کند تا به تنش برسیم چون E ها متفاوت است.

مثال)



$E_w = 12.5\ GPa$

$E_s = 200\ GPa$

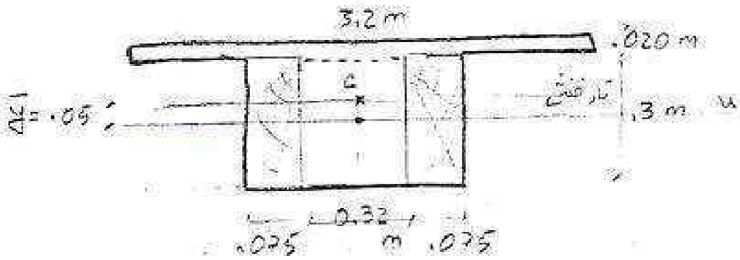
$M = 50\ kNm$

حداکثر تنش در چوب = ؟

تنش در لبه بالایی ورق فولادی = ؟

ما فولادها را به چوب تبدیل کرده، بجای فولادها، چوب آورده ایم.

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200}{12.5} = 16$$



حال می توان کل سطح را چوب با ابعاد بزرگ شده
از چوب با فرض اینکه تبدیل یافته در نظر می گیریم.

برای راحتی محاسبات مرکز سطح را محاسبه می کنیم.

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(.16)(3.2 \times .02) + 0}{3.2 \times .02 + .47 \times .3} = .050\,m$$

$$I = \frac{1}{12}(.47)(.3)^3 + (.47 \times .3)(.05)^2 + \frac{1}{12}(3.2)(.02)^3 + (3.2 \times .02)(.16 - .05)^2$$

$$\Longrightarrow \underline{I = 2.19 \times 10^{-3}\ m^4}$$

حداکثر تنش در لبه پایینی چوب اتفاق می افتد چون بیشترین فاصله را تا تار خنثی دارد.

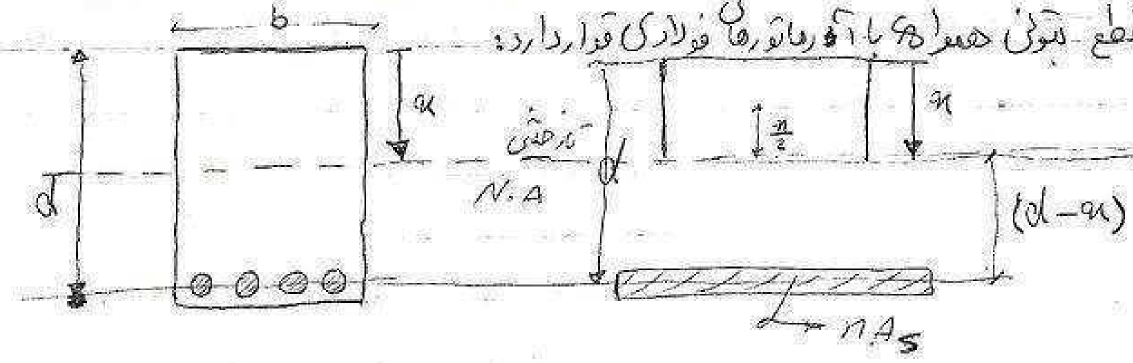
$$\sigma_w = \frac{Mc_2}{I} = \frac{50 \times 10^3 \times .2}{2.19 \times 10^{-3}} \longrightarrow \sigma_w = 4.57\ MPa$$

$$\sigma_s = n\frac{Mc_1}{I} = 16 \times \frac{50 \times 10^3 \times .120}{2.19 \times 10^{-3}} \longrightarrow \sigma_s = 43.8\ MPa$$

تبصره I: افزایش سطح فقط به موازات تار خنثی صورت می گیرد و ارتفاع تغییر نمی کند.

تبصره II: کاربرد اصلی این مبحث در تیرهای بتنی است.

فرض کنیم یک مقطع بتونی همراه با آرماتورهای فولادی قرار دارد:



$n = \frac{E_s}{E_c}$ بتون $A_s =$ تعداد میلگرد × سطح مقطع هر میلگرد

هدف در ابتدا محاسبه x یعنی فاصله تار خنثی می باشد:

ممان بالائی $= (b \times x) \times \frac{x}{2}$
ممان پائینی $= n(A_s(d-x))$
$\longrightarrow (b \times x) \times \frac{x}{2} - nA_s(d-x) = 0$

$\longrightarrow \frac{1}{2}bx^2 - nA_s x - nA_s d = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$ همواره یکی از xها غیرقابل قبول است.

برای پیدا کردن مقطع معادل در چنین مثالی از $\frac{bh^3}{12}$ به علت کوچکی در اکثر مسئله‌ها صرفنظر شده و فقط Ad^2 را محاسبه می کنیم.

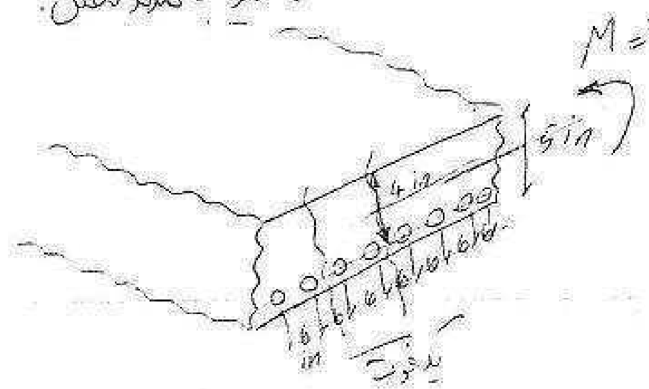
تبصره ۱: در قسمت پائین چون جسم در حال کشش است و بتون مقاومت کششی در مقابل میلگرد ندارد، از بتون صرفنظر می کنیم.

تبصره ۲: اگر در مقطع تغییر ناگهانی را داشته باشیم:

$\sigma = K\frac{My}{I}$

$K \leftarrow$ ضریب تمرکز تنش.

(برای هر یک فوت از عرض) $M = 35\ kip \cdot in$



مثال) میلگردهای فولادی به قطر $\frac{5}{8}$

$E_c = 3 \times 10^6\ psi$

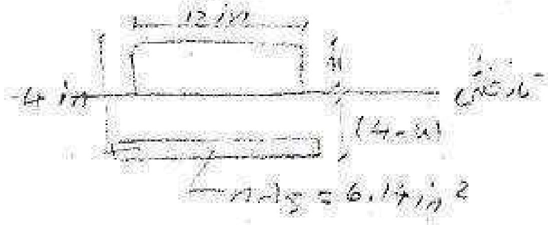
$E_s = 30 \times 10^6\ psi$

سؤال: حداکثر تنش در بتون و تنش در فولاد؟

مقاومت مصالح

برای محاسبه در فاصله یک فوتی در این مثال دو تا میلگرد ۵ بکار می‌رود محاسبات را انجام می‌دهیم.

$A_s = 2\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^2\right] = 0.614\ in^2$



$n = \frac{E_s}{E_c} = 10 \Rightarrow nA_s = 6.14$

$12x\left(\frac{x}{2}\right) - (6.14)(4-x) = 0 \Rightarrow x = 1.575\ in$

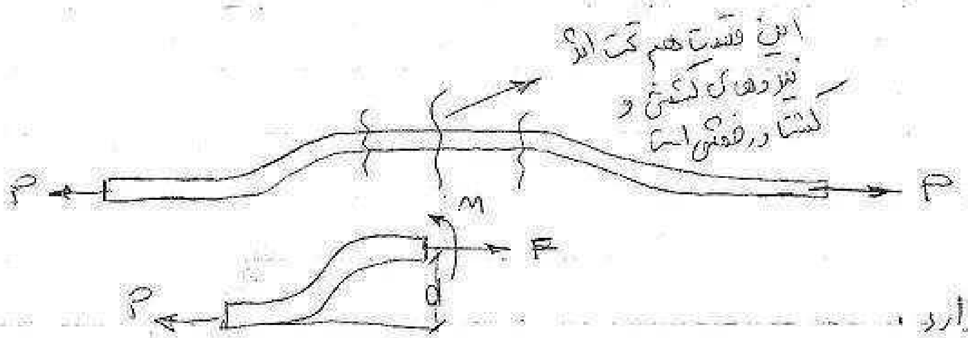
$\Rightarrow 4 - x = 2.425$

$I = \frac{bh^3}{3}$ برای مستطیل روی یک ضلع $\Rightarrow$

$I = \frac{1}{3}(12)(1.575)^3 + (6.14)(4-1.575)^2 = 51.7\ in^4$

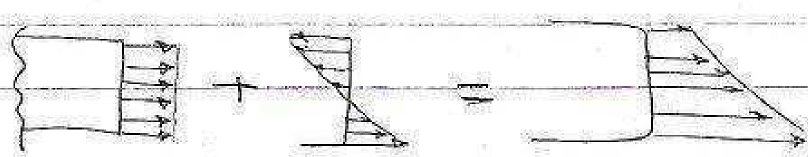
$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{35\times 1.575}{51.7\ in^4} \Rightarrow \sigma_c = 1.066\ ksi$ جواب قسمت I

$\sigma_s = n\frac{Mc_2}{I} = 10\times\frac{35\times 2.425}{51.7} \Rightarrow \sigma_s = 16.42\ ksi$ " " II



مقدار M بستگی به فاصله d دارد.

طریقه محاسبه: طبق اصل سوپر پوزیشن:



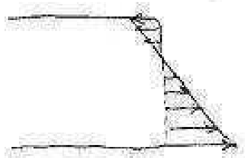
$\sigma_x = \frac{P}{A}$ مرکزی (Centric)

[bending] $\sigma_x = -\frac{My}{I}$

$\sigma_x = (\sigma_x)_{centric} + (\sigma_x)_{bending}$

$$\rightarrow \sigma_{n} = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

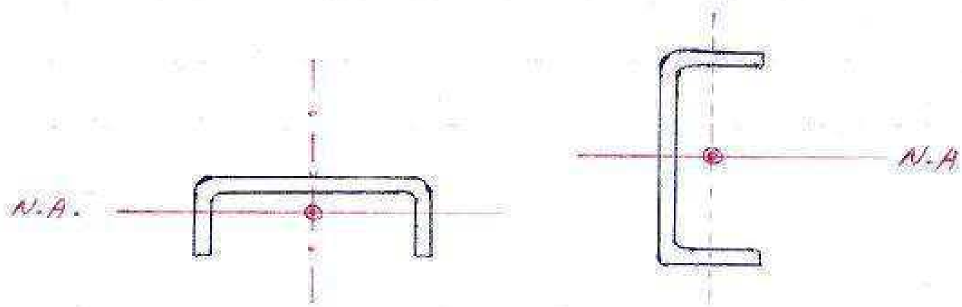
تبصره ۸ : ممکن است قسمت منفی در قسمت دوم بر مثبت غلبه کرده و شکل بصورت زیر باشد :

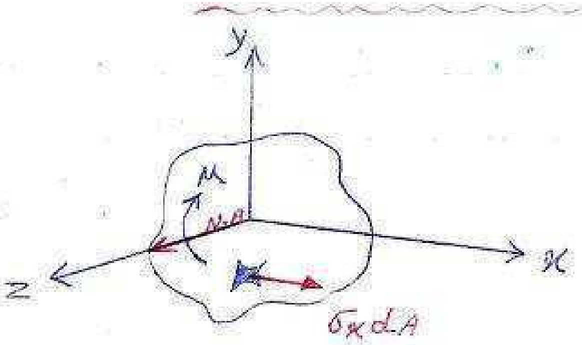


موقعیت تار خنثی با قرار دادن فرمول بالا برابر صفر بدست می آید .

اگر جسم دارای صفحه تقارن نباشد (یا)
گشتاور در صفحه تقارن قرار نگیرد :

* مثلاً در صنعت ناودانها را مایل قرار می دهند (تا فاصله جرم تا مرکز سطح افزایش یابد) که در این حالت گشتاور دیگر در صفحه تقارن قرار نمی گیرد .





* فرض می کنیم تار خنثی بر محور z ها قرار داشته باشد ؛ و بردار N.A و گشتاور برهم منطبق باشند :

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \int \sigma_x \, dA = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_y = 0 \rightarrow \int z \, \sigma_x \, dA = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_z = 0 \rightarrow \int (-y \, \sigma_x \, dA) = M \qquad (3)$$

$\sigma_x = -\sigma_m \dfrac{y}{c}$ و (2) $\rightarrow$

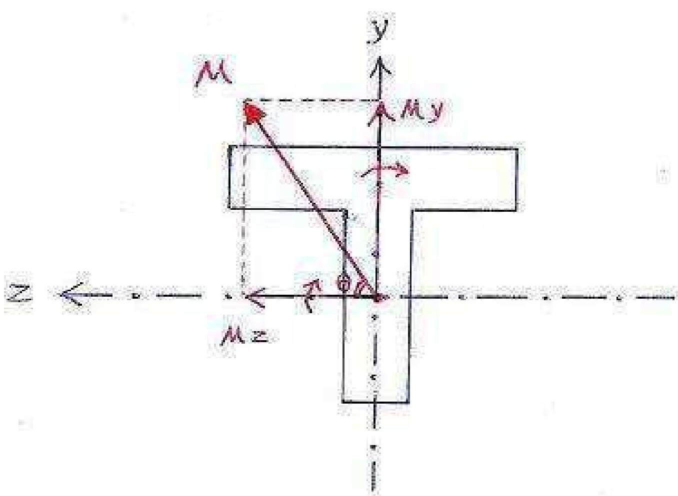
$$\int z \left(-\frac{\sigma_m}{c}\, y\right) dA = 0 \longrightarrow \underbrace{\int z\, y\, dA = 0}_{\text{همان حاصلضرب}}$$

* همان حاصلضرب وقتی صفر می شود که محوری که می خواهیم حول آن این همان را بگیریم محور اصلی باشد. مثلاً برای مقاطع متقارن - همان محورهای تقارن می شوند محور اصلی و اگر یک محور تقارن داشت می شود یکی از محورهای اصلی و محور اصلی دیگر عمود بر آن - است.

* بحث فوق مربوط بود به «خمش غیر متقارن» بود.

* برای حل مسائل بردار گشتاور را بر روی z و y تصویر می کنیم و در هر حالت محاسبه می نماییم و سپس طبق اصل superposition نتایج را باهم جمع می کنیم.

یک نکته -



$$M_y = M \sin\theta$$
$$M_z = M \cos\theta$$

$$\begin{cases} \sigma_x = +\dfrac{M_y Z}{I_y} \\[2ex] \sigma_x = -\dfrac{M_z y}{I_z} \end{cases}$$

چون M مثبت است که برای z های منفی کششی است $(+)$.

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y Z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}}$$

* برای بدست آوردن موقعیت تار خنثی تنش را صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{M_y Z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = 0 \quad \rightarrow$$

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}\right) z$$

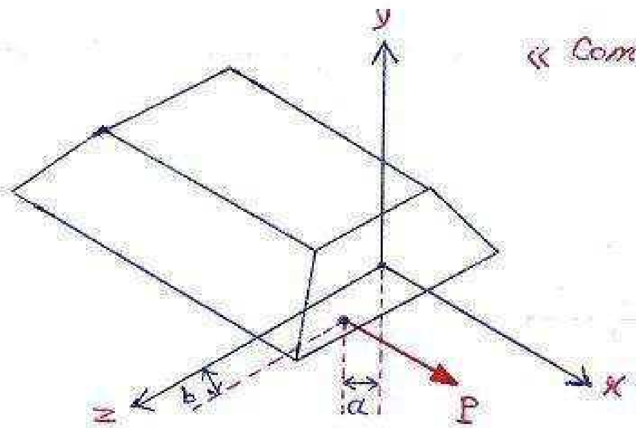
$$y = \underbrace{\left(\frac{I_z}{I_y} \tan\theta\right)} z$$

$$\boxed{y = \tan\varphi \; z}$$

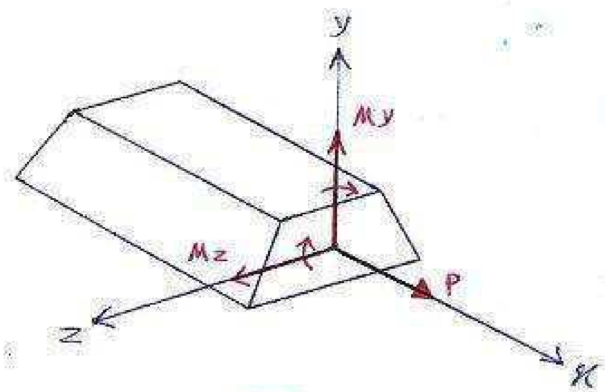
φ زاویه تار خنثی است
که اگر I_z از I_y بزرگتر باشد
$\varphi > \theta$ است و تار خنثی بالای بردار گشتاور قرار می‌گیرد و اگر I_z از I_y کوچکتر باشد برعکس. چون I_z و I_y مثبت هستند لذا $\tan\theta$ و $\tan\varphi$ هم علامتند و لذا تار خنثی و بردار گشتاور همواره در یک ربع قرار می‌گیرند.

* به عبارتی آن محوری که ممان اینرسی اش قوی تر است تار خنثی را از خود دور می کند.

تنش مرکب « Combined stress »



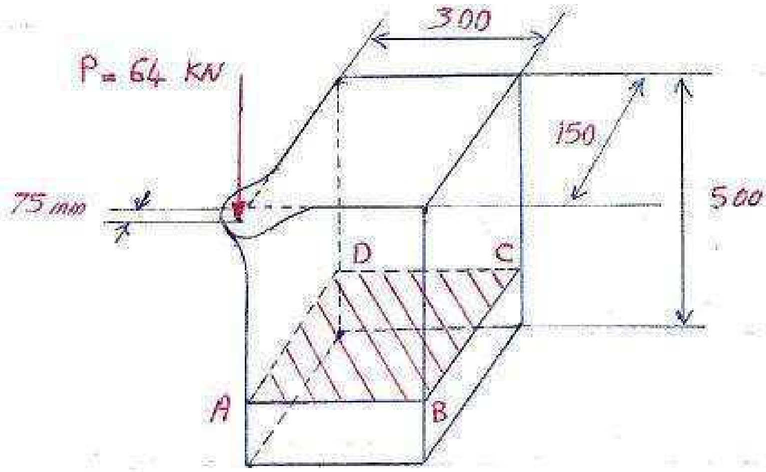
* اگر نیروی P در مرکز سطح وارد نشود دو تا گشتاور هم بوجود می آورد پس سه عامل داریم که تولید تنش می کنند که هر سه تنش نرمال است.



$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y Z}{I_y}$$

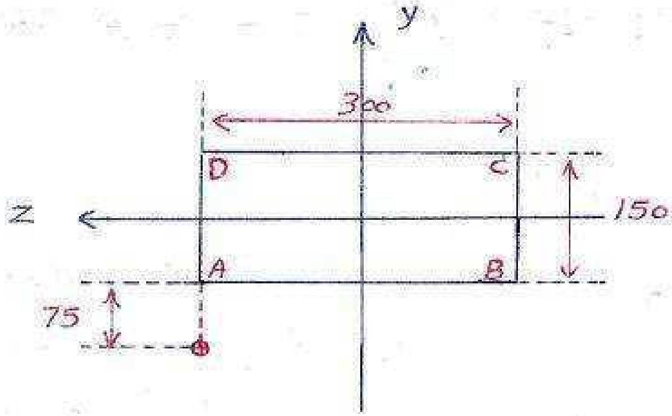
* در امتحان پایان ترم حتماً از این قسمت سؤالی خواهد آمد که در آن هر ۶ حالت تنش موجود باشد.

مثال -



مطلوبست : a) توزیع تنش در مقطع ABCD

b) موقعیت تار خنثی در مقطع فوق



$P = -64 \ KN$

$M_y = -64 \times 0.15 = -9.6 \ KNm$

$M_z = -64 \times (0.075 + 0.075) = -9.6 \ KNm$

$A = (0.15)(0.3) = 0.045 \ m^2$

$S_y = 2.25 \times 10^{-3} \ m^3$

$S_z = 1.125 \times 10^{-3} \ m^3$

$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{S}$

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M_z}{S_z} \mp \frac{M_y}{S_y} \implies$$

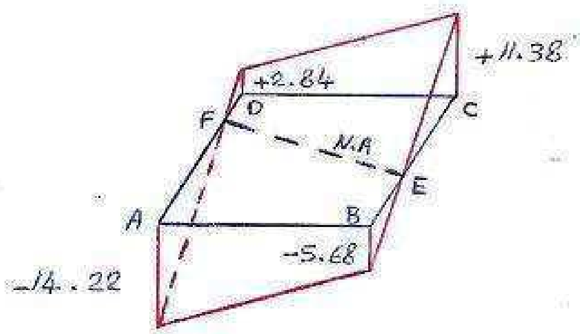
$$\sigma = \frac{-64}{45 \times 10^{-3}} \pm \frac{9.6}{1.125 \times 10^{-3}} \mp \frac{9.6}{2.25 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = (-1.42 \pm 8.53 \mp 4.27) \times 10^{+3}$$

(اتما) :

$$\begin{cases} \sigma_A = (-1.42 - 8.53 - 4.27)10^{+3} = -14.22 \text{ MPa} \\ \sigma_B = (-1.42 - 8.53 + 4.27)10^{+3} = -5.68 \text{ MPa} \\ \sigma_C = (-1.42 + 8.53 + 4.27)10^{+3} = +11.38 \text{ MPa} \\ \sigma_D = (-1.42 + 8.53 - 4.27)10^{+3} = +2.84 \text{ MPa} \end{cases}$$

* برای یافتن توزیع تنش گرافیکی عمل می کنیم :



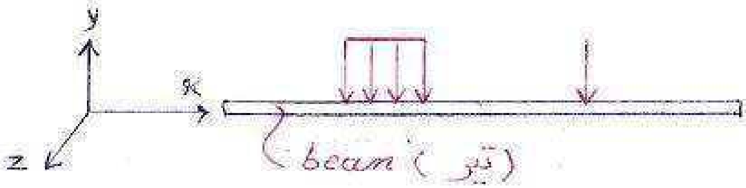
* در دو نقطه که تنش صفر است تار خنثی از آن دو نقطه می گذرد .

* از تشابه هندسی مثلثها :

$CE = 100 \text{ mm}$

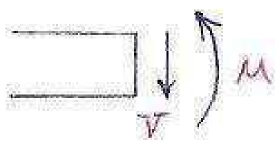
$AF = 125 \text{ mm}$

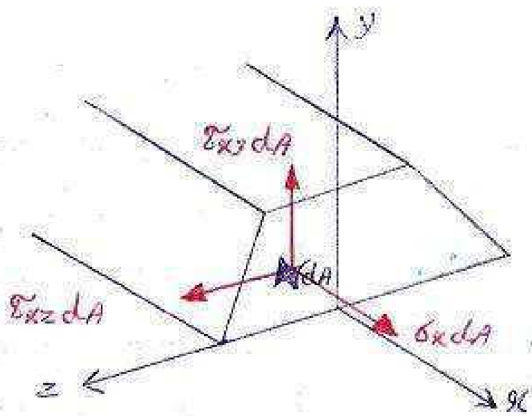
نیروهای برشی (V_y و V_z) :



(بارگذاری جانبی)

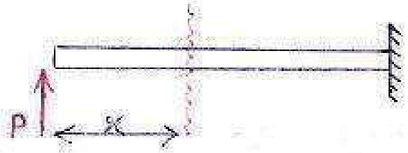
* باید دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنیم.





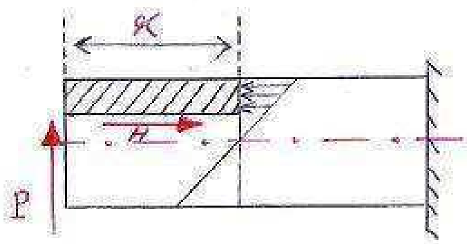
$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow \int \tau_{xy}\, dA = -V$$

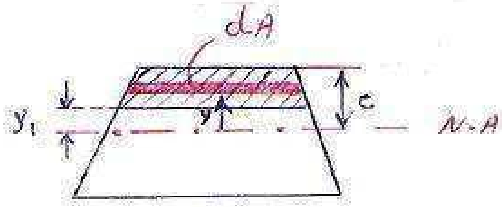
$$\Sigma F_z = 0 \longrightarrow \int \tau_{xz}\, dA = 0$$



$$M = P.x$$

$$\sigma = -\frac{My}{I} = -\frac{P.xy}{I}$$





$$\sigma_x \, dA = -\frac{Pxy}{I} \, dA$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow H - \int \frac{Pxy}{I} \, dA = 0$$

$$H = \frac{Px}{I} \int_{y=y_1}^{y=c} \underbrace{y \, dA}_{Q}$$

(Q) ممان سطح آن قسمت از تیر است که می‌خواهیم بررسی کنیم با چه نیروئی چسب آن کنده می‌شود یا با چه نیروئی توسط ابزار برش کنده می‌شود:

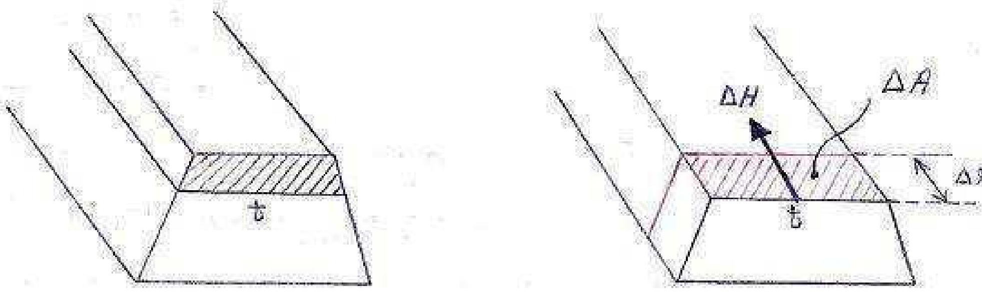
$$Q = \int_{y=y_1}^{y=c} y \, dA = A\bar{y}$$

$$H = \frac{P \cdot Q}{I} \cdot x$$ نیروی برشی

$$q = \frac{H}{x} = \frac{PQ}{I}$$ shear Flow جریان برش

* در شرایطی که انواع بارهای گسترده و متمرکز را داریم بجای P نیروی برشی لازم در هر مقطع را از روی دیاگرام یافته و قرار می‌دهیم.

* برای طراحی به تنش برشی احتیاج داریم :



* به فرض قسمت فوقانی را بررسی داریم (مطابق شکل) :

$$\Delta A = t\,\Delta x$$

$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$\Delta H = q\,\Delta x = \frac{VQ}{I}\,\Delta x$$

$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ \times \Delta x}{I \times t \times \Delta x} \longrightarrow$$

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

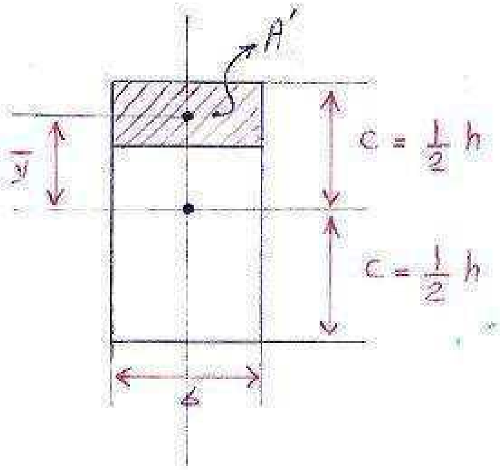
* I ـ برای کل سطح مقطع محاسبه می شود.
* Q ـ فقط ممان اول سطح هاشور خورده است.
* I و Q هردو نسبت به $N.A$ محاسبه می شوند.

* اگر بجای چسب، میخ داشتیم بازهم نیروی برشی را حساب می کنیم و تعداد میخها را هم حساب کرده و نیرو را بر تعداد آنها تقسیم می کنیم تا مشخص شود هر میخ چقدر نیروی برشی را تحمل می کند.

برای حل هر مسئله :

۱- یافتن مرکز سطح .
۲- یافتن تار خنثی .
۳- مشخص کردن سطح هاشور خورده و تعیین Q برای آن .
۴- محاسبه I برای کل سطح مقطع .

مثال -



$$* \quad \bar{y} = \frac{1}{2}(c+y) \quad \leftarrow \quad «\frac{c-y}{2} + y» = \bar{y}$$

$$Q = A'\bar{y} = b(c-y) \times \frac{1}{2}(c+y)$$

$$* \quad Q = \frac{1}{2} b (c^2 - y^2)$$

$$* \quad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3} b c^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4} \frac{c^2 - y^2}{bc^3} V$$

کل سطح مقطع $\xrightarrow{A = 2bc}$

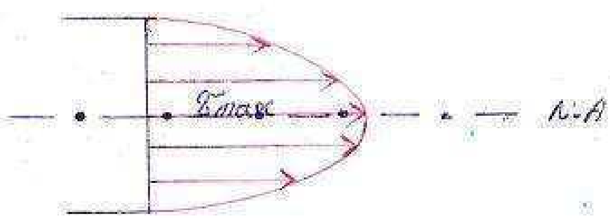
$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

* در بحث بارگذاری جانبی لایه‌ای که روی تار خنثی قرار گرفته بیشترین ممان سطح را دارد و لذا بیشترین تنش برشی را دارد.

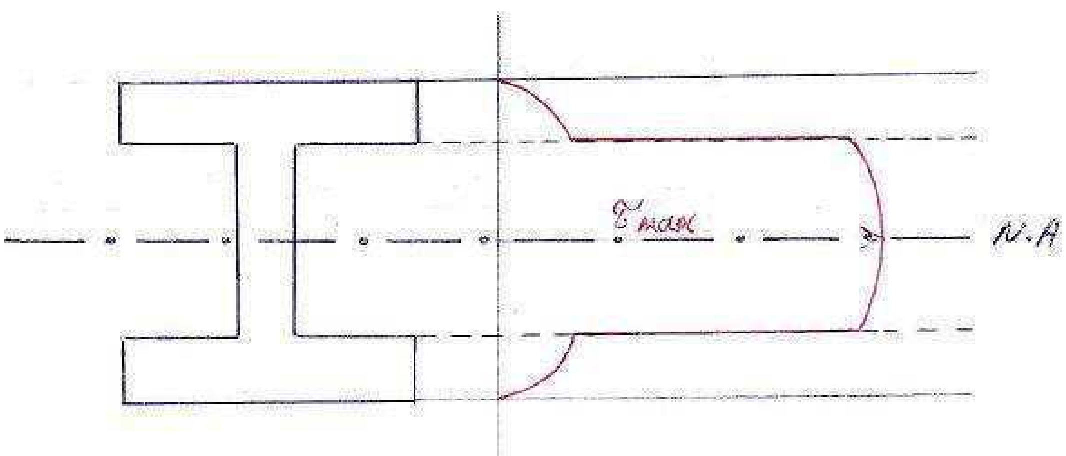
$$\left(\tau_{xy}\right)_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$ «برای مقطع مستطیل»

* لذا از این پس از فرمول دقیق فوق بجای فرمول $\tau = \frac{V}{A}$ که در فصل (۲) بیان شد استفاده می کنیم. (برای سایر مقاطع هم محاسبه می‌شود)

* چون در معادله y^2 داریم لذا توزیع تنش برشی در مقاطع مستطیلی بصورت سهمی است.

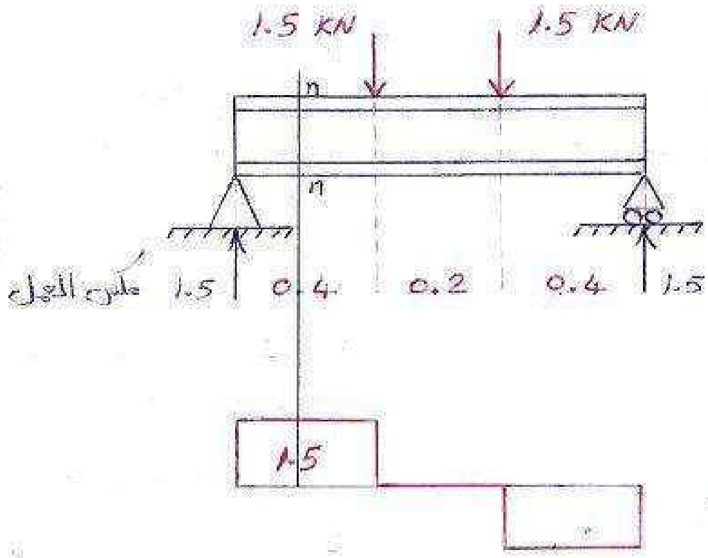


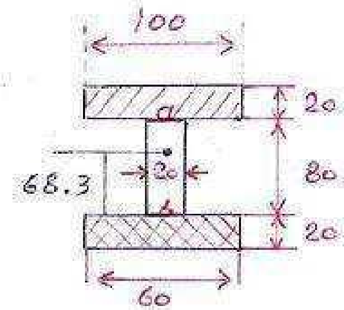
توزیع تنش در تیرآهنها :



* برای تقویت تیرآهن در برابر خمش بالهای آن و برای تقویت آن در برابر نیروی برشی باید جان تیرآهن را تقویت کنیم.

مثال -





* در مقطع مورد نظر باید نیروی برشی را به کمک دیاگرام تعیین کرد.

در اتصال a -

$$Q = A\bar{y}_1 = (0.100)(0.020)(0.0417) = 83.4 \times 10^{-6}\ m^3$$

$$I = 8.63 \times 10^{-6}\ m^4$$

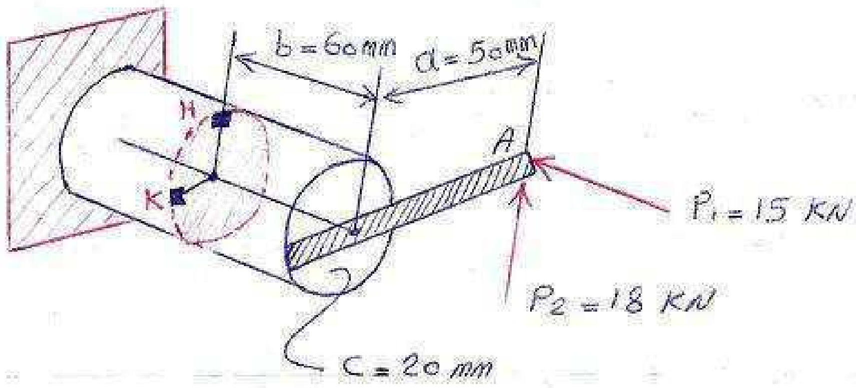
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{1500 \times 83.4 \times 10^{-6}}{8.63 \times 10^{-6} \times 0.02} = 725\ KPa$$

در اتصال b -

$$Q = A\bar{y}_2 = 0.06 \times 0.02 \times 0.0583 = 70 \times 10^{-6}\ m^3$$

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} = \frac{1500 \times 70 \times 10^{-6}}{8.63 \times 10^{-6} \times 0.02} = 608\ KPa$$

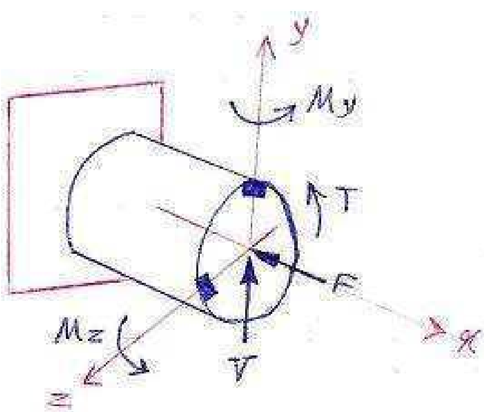
مثال - مهم



* در صفحه‌ای به فاصله 60 از سر میله و در المانهای K و H تنشها را بیابید.

مجموعه عوامل -

$F = P_1 = 15$ KN نیروی نرمال
$V = P_2 = 18$ KN " برشی
$T = P_2 . a = 900$ N.m گشتاور پیچشی
$M_y = P_1 . a = 750$ N.m گشتاور خمشی
$M_z = P_2 . b = 1080$ N.m " "



* $A = \pi C^2 = 1.257 \times 10^{-3}\ m^2$
* $I_y = I_z = \frac{1}{4} \pi C^4$
$= 125.7 \times 10^{-9}\ m^4$
* $J = \frac{1}{2} \pi C^4 =$
$251.3 \times 10^{-9}\ m^4$
* $t = 40$ mm ضخامت

تنش در H :

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{centric} + (\sigma_x)_{bending}$$

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} - \frac{M_z c}{I_z} = \frac{-15 \times 10^3}{1.257 \times 10^{-3}} - \frac{1080 \times (0.02)}{125.7 \times 10^{-9}}$$

$$* \ \sigma_x = -183.8 \ \text{MPa}$$

(0.02 ـ فاصله تا تار خنثی)

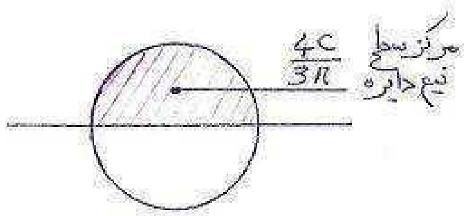
$$* \ \tau_{xz} = (\tau_{xz})_{TWIST} = \frac{T \cdot c}{J} = \frac{900 \times 0.02}{251.3 \times 10^{9}} = 71.6 \ \text{MPa}$$

تنش در K :

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y c}{I_y} \rightarrow$$

$$* \ \sigma_x = 107.4 \ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_{shear} - (\tau_{xy})_{TWIST}$$



* فرض می کنیم قسمت بالا می خواهد کنده شود و ۲ تا می شود سطح ها شور خورده.

$$* \ Q = \frac{1}{2}\pi c^2 \times \frac{4c}{3\pi} = \frac{2}{3}c^3 = 5.33 \times 10^{-6} \ m^3$$

$$(\tau_{xy})_{shear} = \frac{VQ}{It} = \frac{18 \times 10^3 \times 5.33 \times 10^{-6}}{125.7 \times 10^{-9} \times 0.04} = 19.1 \ \text{MPa}$$

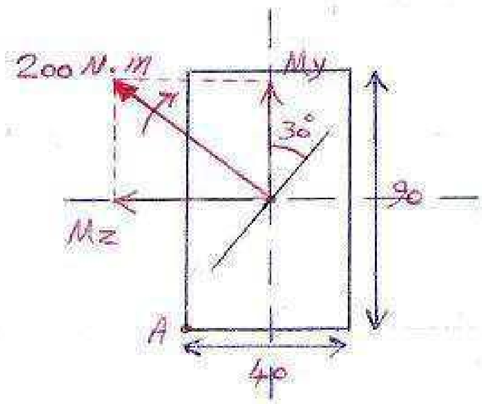
«shear»

$$(\tau_{xy})_{TWIST} = 71.6$$

«TWIST»

$$\Rightarrow * \ \tau_{xy} = 19.1 - 71.6 = -52.5 \ \text{MPa}$$

مثال - مهم -



یک تیر چوبی داریم
با مقطع مستطیلی.
بردار گشتاور در صفحه‌ای اثر
می‌کند که با قائم زاویه 30°
می‌سازد.

a - حداکثر تنش در تیر
b - زاویه تار خنثی با افق

(اگر نیرو هم بدهند روش حل همین است.)

$$M_z = 200 \cos 30° = 173.2 \ N.m$$
$$M_y = 200 \sin 30° = 100 \ N.m$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0.04)(0.09)^3 = 2.43 \times 10^{-6} \ m^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(0.09)(0.04)^3 = 0.480 \times 10^{-6} \ m^4$$

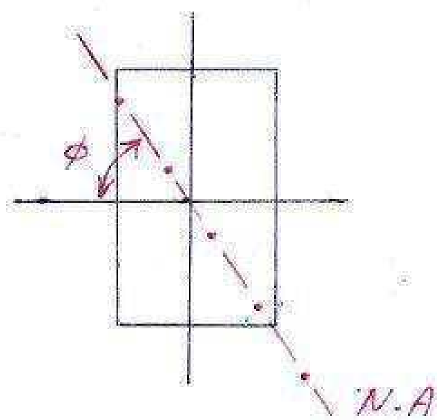
* حداکثر تنش در نقطه A است که هم بر اثر My کشیده می‌شود و هم بر اثر Mz. (جهت گشتاورهای My و Mz را با قانون دست راست می‌یابیم و نقاطی را که کشیده یا فشرده می‌شوند - یعنی بالا و پایین تار خنثی مربوط به هر محور را معین می‌کنیم).

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{M_z y}{I_z} = \dfrac{173.2 \times 0.045}{2.43 \times 10^{-6}} = 3.21 \ MPa \\ \sigma_2 = \dfrac{M_y . z}{I_y} = \dfrac{100 \times 0.02}{0.480 \times 10^{-6}} = 4.17 \ MPa \end{cases}$$

* $\sigma_{max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 7.38 \text{ MPa}$

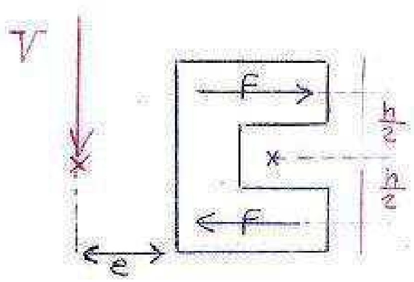
* حداکثر تنش فشاری همین مقدار است با علامت منفی در نقطه مقابل.

* $\tan\phi = \frac{I_z}{I_y} \tan\theta = \frac{2.43}{0.480} \times \tan 30 = 2.92$



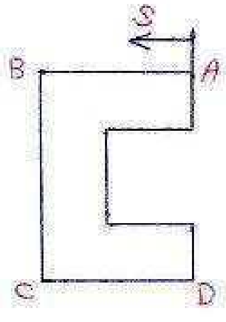
* ممان اینرسی حول هر محوری که قوی‌تر است N.A را از خود می‌راند.

مرکز برش -



$F.h = V.e$

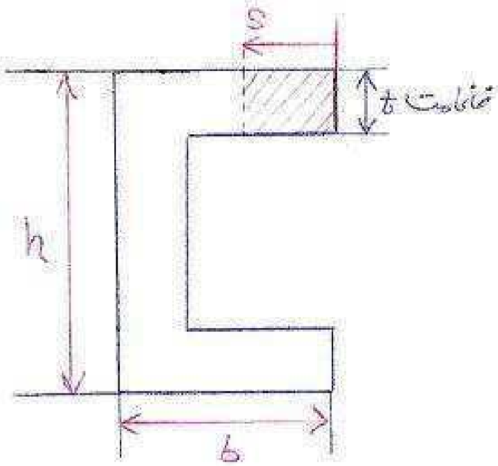
$$\boxed{e = \frac{F.h}{V}}$$



(جریان برش) $q = \tau . t = \frac{VQ}{I}$

$$\boxed{F = \int_A^B q\,ds} \qquad \boxed{V = \int_B^C q\,ds}$$

مثال- یک ناودانی داریم . مرکز برش آن مطلوب است.



$$* \quad q = \frac{VQ}{I} = \frac{V.s.t.h}{2I}$$

$$F = \int_0^b q\,ds$$

$$F = \int_0^b \frac{Vsth}{2I}\,ds$$

$$F = \frac{Vth}{2I}\int_0^b s\,ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I} \qquad e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2 h}{4IV} = \frac{th^2b^2}{4I}$$

$$I = \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

$$I = \frac{1}{12}th^2(6b+h) \longrightarrow$$

$$e = \frac{3b^2}{6b+h} \longrightarrow e = \frac{b}{2+\frac{h}{3b}}$$

* برای محاسبه I یک مستطیل عمودی داریم و دو مستطیل افقی که هر یک را محاسبه می کنیم و برای افقی ها انتقال Ad^2 را هم داریم.